

# MODELO DE CAGAN, COINTEGRAÇÃO, QUEBRAS ESTRUTURAIS, EXPECTATIVAS RACIONAIS E CHOQUES NA DEMANDA POR MOEDA: EVIDÊNCIAS PARA O BRASIL (1970-94)\*

Mauricio Canêdo-Pinheiro<sup>§</sup>

## RESUMO

A partir do modelo proposto por Cagan (1956), analisa-se o comportamento da demanda por moeda e do nível de preços no Brasil entre janeiro de 1970 e junho de 1994, período caracterizado por altas taxas de inflação. Uma das vantagens desta abordagem é que ela permite a estimação dos parâmetros relevantes do modelo, com técnicas de cointegração, sem qualquer hipótese a respeito do processo de formação de expectativas. Uma das novidades deste artigo é o uso de técnicas de cointegração robustas à presença de quebra estrutural e com determinação endógena da data de ocorrência da mesma, mais adequadas a um ambiente em que planos econômicos alteraram o comportamento das séries relevantes. As relações de cointegração implícitas no modelo também são utilizadas para se testar a presença de bolhas racionais, a hipótese de maximização das receitas obtidas pelo governo com o imposto inflacionário e a validade da hipótese de expectativas racionais. Por fim, em abordagem pouco usual em estudos deste tipo, segue-se Campbell & Shiller (1987) e Durlauf & Hall (1989*a, b*) e constroem-se medidas da magnitude dos choques na demanda por moeda. No caso brasileiro tais choques explicam entre 51% e 99% da variação na demanda monetária no período.

**Palavras-Chave:** modelo de Cagan, expectativas racionais, hiperinflação, cointegração, demanda por moeda.

## ABSTRACT

Using the model proposed by Cagan (1956), the money demand and prices are investigated in Brazilian high-inflation period (1970-1994). One of advantages of this approach is the possibility to estimate the relevant parameters without any specific assumption on expectations. Once the relevant series potentially have structural breaks, cointegration methods which permit changes in the cointegration vector are used. The long-run relationship between the relevant series is also used to test the presence of rational bubbles, the hypothesis of maximization of the revenues with inflation tax and the validity of rational expectation hypothesis. Finally, in an unusual approach in this literature, noise measures are calculated with respect to money demand following Campbell & Shiller (1987) and Durlauff & Hall (1989*a, b*). In Brazilian case between 51% and 99% of the variation in money demand are explained by shocks.

**Keywords:** Cagan model, rational expectations, hyperinflation, cointegration, money demand.

**JEL Classification:** C32, E31, E41.

---

\* Agradecimento aos comentários e sugestões de João Victor Issler, Fernando de Holanda Barbosa Filho, Ricardo de Oliveira Cavalcanti e Fábio Augusto Reis Gomes. Obviamente, os erros remanescentes são de inteira responsabilidade do autor.

§ Pesquisador do IBRE/FGV. Endereço para contato: Rua Barão de Itambi 60, 8º andar, Rio de Janeiro – RJ. CEP: 22231-000. E-mail: canedo@fgv.br.

## 1 INTRODUÇÃO

Diversos autores têm tomado o arcabouço de Cagan (1956) como ponto de partida para analisar experiências de hiperinflação. Em particular, técnicas de cointegração têm sido utilizadas em estudos de surtos inflacionários ocorridos em diversas regiões: Alemanha [Taylor (1991), Engsted (1993, 1996) e Michael, Nobay & Peel (1994)], países europeus [Engsted (1994)], América Latina [Phylaktis & Taylor (1993)], China, Hungria e Sérvia [Engsted (1998)], Israel [Yashiv (1994)] e Brasil [Rossi (1994)]. Em alguns casos, mudanças estruturais poderiam justificar alterações da demanda por moeda ao longo do tempo. Para considerar esta possibilidade, alguns autores têm estimado a demanda por moeda com a inclusão de quebras estruturais exógenas [Yashiv (1994)] ou diferentes demandas para períodos distintos [Rossi (1994)]. Nesse sentido, uma das contribuições deste artigo é a estimação da demanda por moeda com técnicas de cointegração robustas à presença de quebra estrutural com determinação endógena da data de ocorrência da mesma.

Além desta introdução, este artigo é dividido em seis seções. Na seção 2, o modelo proposto em Cagan (1956) é descrito. Partindo-se da abordagem de Campbell & Shiller (1987) para análise de modelos de valor presente, o objetivo é estimar de modo superconsistente os parâmetros de interesse do modelo. No entanto, essa abordagem a princípio requer que as séries relevantes sejam  $I(1)$ , propriedade que costumam não possuir em períodos de alta inflação. Desse modo, ainda na seção 2, o modelo é reorganizado de modo a permitir a utilização de séries  $I(2)$ , tal como em Engsted (1993, 1994).

Por sua vez, a seção 3 traz uma breve descrição das propriedades estatísticas das séries. Em especial, investiga-se a ordem de integração das mesmas. Dada a presença potencial de *inliers*, *outliers* e quebras estruturais, além de testes convencionais (*ADF* e *Phillips-Perron*), são empreendidos os testes propostos em Lumsdaine & Papell (1997) e Cati, Garcia & Perron (1999), mais adequados às características das séries relevantes.

Na seção 4 mostra-se que o modelo descrito na seção 2 implica uma série de relações de longo prazo entre as variáveis relevantes. Desse modo, testa-se a validade dessas relações e estima-se, via técnicas de cointegração, os parâmetros de interesse do modelo. Dada as possíveis quebras estruturais no vetor de cointegração, aplicam-se também testes que consideram essa possibilidade. Adicionalmente, as relações de cointegração implícitas no modelo também são utilizadas para se testar a presença de bolhas racionais e a hipótese de que o governo escolhe a taxa de inflação que maximiza as receitas obtidas com o imposto

inflacionário. Cabe salientar que a estimação dos parâmetros do modelo independe da hipótese que se faz a respeito do processo pelo qual os agentes formam suas expectativas.

Por fim, a validade da hipótese de expectativas racionais é testada na seção 5. Basicamente, trata-se de um teste de uma condição de ortogonalidade. Como esses testes são capazes de detectar a presença de choques na demanda por moeda, mas não de mensurar sua magnitude, constroem-se na seção 6 estimativas do tamanho do componente de choque no modelo de Cagan. Nessa tarefa são utilizadas as metodologias de Campbell & Shiller (1987) e Durlauf & Hall (1989a, b). Trata-se de abordagem pouco usual em estudos deste tipo [uma exceção é Engsted (1998)]. Segue-se uma breve conclusão (seção 7).

## 2 MODELO DE CAGAN

Em períodos hiperinflação a demanda por moeda seria dada por [Cagan (1956)]:

$$m_t - p_t = \alpha - \lambda[E_t(p_{t+1}) - p_t] + u_t, \quad (1)$$

em que  $m_t$  é o logaritmo da oferta nominal de moeda,  $p_t$  denota o logaritmo do nível de preços doméstico,  $u_t$  são choques não observáveis na demanda por moeda,  $E_t(\cdot) \equiv E(\cdot | I_t)$  é a esperança condicional ao conjunto de informação em  $t$ .

O parâmetro  $\lambda$  é a semi-elasticidade da demanda por encaixes monetários reais com relação à inflação esperada. O termo  $u_t$  pode ser encarado como uma variável que captura elementos da demanda por moeda que não a inflação esperada [Phylaktis & Taylor (1993)]. A não inclusão de outras variáveis reflete a percepção expressa em Cagan (1956) de que, sob alta inflação, a demanda por moeda seria determinada basicamente pelas expectativas de inflação, ou seja, os componentes de  $u_t$  teriam pequeno papel nessa determinação.<sup>1</sup>

A especificação de (1) pode ser derivada a partir de modelos com *market clearing* instantâneo e com agentes maximizadores, cujas utilidades dependem de seu consumo e dos encaixes monetários reais [ver Gray (1984), por exemplo]. Nesse caso,  $\lambda$  estaria diretamente relacionado com parâmetros da função utilidade desses agentes. Nesse sentido, a equação (1) poderia ser encarada como uma relação de arbitragem, ou seja, a variável  $u_t$  poderia ser interpretada como uma espécie de excesso de retorno sobre a oferta real de moeda.

---

<sup>1</sup> Essa hipótese pode ser justificada pelo fato de que, sob alta inflação, as variações na taxa real de juros e no produto real são pequenas quando comparadas às variações nas taxas de inflação esperadas.

Rearranjando os termos de (1) tem-se que:

$$p_t = \left( \frac{1}{1+\lambda} \right) (m_t - u_t) + \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right) E_t(p_{t+1}) - \frac{\alpha}{1+\lambda}. \quad (2)$$

Adiantando e substituindo recursivamente chega-se a:

$$p_t = \left( \frac{1}{1+\lambda} \right) \left[ \sum_{i=0}^{T-1} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^i E_t(m_{t+i} - u_{t+i}) \right] + \left( \frac{1}{1+\lambda} \right)^T E_t(p_{t+T}) - \alpha. \quad (3)$$

Pela imposição da condição de transversalidade  $\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^T E_t(p_{t+T}) \right] = 0$  chega-se a:

$$p_t = \left( \frac{1}{1+\lambda} \right) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^i E_t(m_{t+i} - u_{t+i}) \right] - \alpha. \quad (4)$$

Multiplicando (4) por -1 e adicionando  $m_t$  a ambos os lados tem-se [Engsted (1993)]:

$$m_t - p_t = \alpha - \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^i E_t(\Delta m_{t+i}) + \left( \frac{1}{1+\lambda} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^i E_t(u_{t+i}), \quad (5)$$

em que  $\Delta^p$  é o operador  $p$ -ésima diferença.

Na ausência de choques monetários, os encaixes monetários reais são previsores das variações na oferta de moeda no modelo de Cagan. Da equação (5), se  $(m_t - p_t)$  aumenta, há indicação de que os agentes esperam uma redução no crescimento da expansão da oferta de moeda no futuro. O resultado é uma taxa de inflação menor no futuro e um aumento na demanda por encaixes monetários reais no presente.

Por fim, adicionando  $\lambda \Delta m_t$  a ambos os lados de (5) tem-se que:

$$m_t - p_t + \lambda \Delta m_t = \alpha - (1+\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^i E_t(\Delta^2 m_{t+i}) + \left( \frac{1}{1+\lambda} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^i E_t(u_{t+i}). \quad (6)$$

### 3 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DAS SÉRIES

O período analisado envolve uma série de acontecimentos e mudanças na política econômica que certamente afetaram as variáveis de interesse do modelo exposto na seção anterior. A simples observação das séries relevantes já sugere a ocorrência de alterações no comportamento dessas variáveis (ver Figuras 1 e 2).<sup>2</sup>

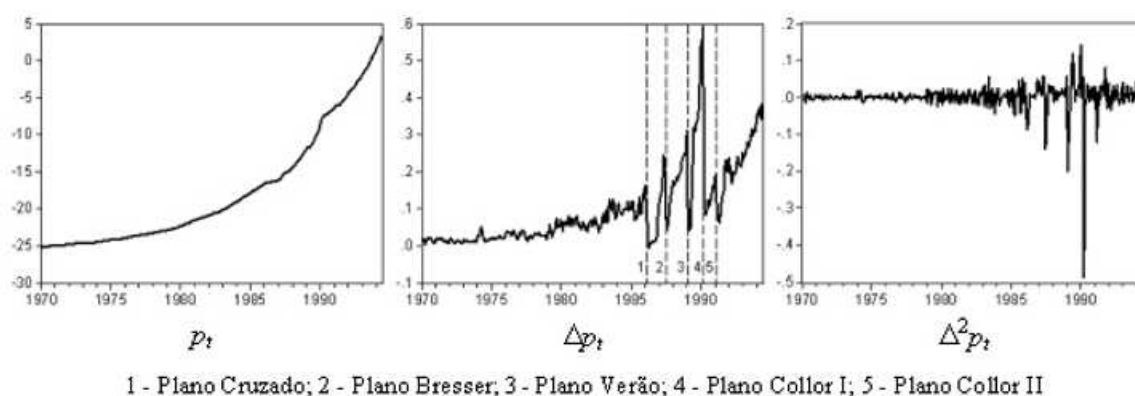
2 Utilizou-se o IGP-DI como série de preços e M1 como série de oferta nominal de moeda.

### 3.1 Preços

Com relação aos preços, após alguns anos de relativa estabilidade nas taxas de inflação, segue-se uma aceleração da mesma a partir do final da década de setenta. A taxa média mensal de inflação no período 1970-1979 foi de aproximadamente 2,31%, contra 8,13% entre os anos de 1980 e 1986. A aceleração da inflação coincide com o aumento da dívida pública, resultado da concessão de incentivos fiscais e creditícios e do incremento da participação do setor público nos investimentos [Carneiro & Modiano (1990)].

Também é clara a influência dos diversos planos de estabilização na variação dos preços. A partir da segunda metade da década de oitenta são observados aumentos crescentes no nível de preços, seguidos de quedas abruptas nas taxas de inflação. A Figura 1 ilustra essa afirmação ao reportar as séries de  $p_t$ ,  $\Delta p_t$  e  $\Delta^2 p_t$  e indicar a ocorrência dos referidos planos econômicos (Plano Cruzado, Plano Bresser, Plano Verão, Plano Collor I e Plano Collor II).

**Figura 1 – Gráficos das Séries  $p_t$ ,  $\Delta p_t$  e  $\Delta^2 p_t$**



Os resultados dos testes *ADF* e Phillips-Perron (não reportados por economia de espaço) indicam que as séries  $p_t$  e  $\Delta^2 p_t$  são claramente não-estacionária e estacionária, respectivamente. Esses resultados são robustos ao teste utilizado e ao período analisado.

No entanto, as evidências para a série  $\Delta p_t$  não são conclusivas. Em especial, para os períodos que incluem os planos de estabilização os testes apontam para rejeição da hipótese nula de que a série possui raiz unitária. Em um período de inflação explosiva seria esperado um comportamento não estacionário de  $\Delta p_t$ , o que não é confirmado pelos testes de raiz unitária utilizados. Os resultados contra-intuitivos destes testes podem ser consequência da

presença de planos de estabilização de curta duração [Cati, Garcia & Perron (1999)]. A trajetória explosiva de  $\Delta p_t$  seria interrompida pelos planos econômicos, a inflação seria levada para níveis baixos e posteriormente a trajetória explosiva seria retomada (ver Figura 1). Desse modo, a evolução da série, induzida pelos diversos planos de estabilização mal-sucedidos, mimetizaria a manifestação do comportamento de reversão à média, característico de séries estacionárias. Nesse sentido, os testes usualmente empregados podem estar sendo viesados na direção de rejeitar a hipótese nula de que a série possui raiz unitária.

Sendo assim, em Cati, Garcia & Perron (1999) são sugeridas versões modificadas de alguns testes. Essas versões levam em conta a presença de planos de estabilização (*inliers*) e as modificações consistem basicamente na inclusão de variáveis binárias para cada um deles. No caso do teste *ADF*, a estatística relevante é originalmente construída a partir de:<sup>3</sup>

$$y_t = \bar{\omega} + \eta + \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^k c_j y_{t-j} + \zeta_t. \quad (7)$$

As modificações de (7) sugeridas em Cati, Garcia & Perron (1999) são adaptações dos testes propostos em Vogelsang (1999). As estatísticas relevantes são construídas do mesmo modo e possuem a mesma distribuição dos testes convencionais (desde que os *inliers* sejam uma proporção fixa da amostra). Para efeito de referência, as estatísticas-teste serão denotadas por  $ADF(C_A)$  e  $ADF(C_B)$  e serão construídas a partir de (8a) e (8b), respectivamente:

$$y_t = \bar{\omega} + \eta + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^p [\kappa_j da(j)_t + \mu_j db(j)_t + \beta_j D(j)_t] + \zeta_t, \quad (8a)$$

$$y_t = \bar{\omega} + \eta + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_j y_{t-j} + \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=1}^p \beta_{j,i} D(j)_{t-i} + \zeta_t, \quad (8b)$$

em que  $da(j)_t$  é uma variável binária que assume valor 1 no primeiro mês em que o plano econômico  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  teve efeito e 0 caso contrário,  $db(j)_t$  é variável binária que assume o valor 1 no primeiro mês após o final do plano econômico  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  e 0 caso contrário,  $D(j)_t$  denota uma variável binária que assume valor 1 nos meses em que o plano econômico  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  teve efeito e zero caso contrário.

A construção das variáveis binárias pressupõe o conhecimento das datas de início e término dos planos de estabilização. Embora as datas de início dos planos sejam facilmente identificáveis, a determinação da data em que cada plano econômico deixou de ter efeito se mostra mais complexa, em especial nos planos de curta duração. Por conveniência, seguem-se

---

3 Cabe lembrar que a estatística relevante é a estatística  $t$  para a hipótese nula  $\rho = 1$ .

os resultados de Cati, Garcia & Perron (1999): (i) Plano Cruzado (1986:03-1986:10); (ii) Plano Bresser (1987:07-1097:09); (iii) Plano Verão (1989:02-1989:04); (iv) Plano Collor I (1990:03-1990:05); (v) Plano Collor II (1991:02-1991:06).<sup>4</sup>

Conforme sugestão de Cati, Garcia & Perron (1999), também foram aplicados testes que consideram a presença de *outliers*. Uma vez identificados, basta adicionar às equações (8a) e (8b) uma variável *dummy* para cada *outlier* (e  $k$  defasagens dessa mesma variável). As estatísticas-teste que também levam em conta a presença de *outliers* [e que também são construídas a partir de (8a) e (8b)] serão denotadas  $ADF(C_{AO})$  e  $ADF(C_{BO})$ , respectivamente.

Para identificação dos *outliers* será utilizada a abordagem proposta e os valores críticos de Perron & Rodríguez (2003). Os resultados apontam que as observações relativas ao período 1990:01-1990:03 são categorizadas como *outliers*, justamente os meses de inflação explosiva que antecederam ao plano de estabilização Collor I.

A Tabela 1 apresenta os resultados dos testes modificados para levar em consideração a presença de *inliers* e *outliers*. Há evidências bastante conclusivas com relação à presença de raiz unitária na série  $\Delta p_t$ . Aliás, os resultados são similares aos encontrados em Campêlo & Cribari-Neto (2004) com outros testes robustos à presença de *inliers*.

**Tabela 1 – Testes de Raiz Unitária Modificados para  $\Delta p_t$  \***

Período	$ADF(C_A)$	$ADF(C_B)$	$ADF(C_{AO})$	$ADF(C_{BO})$
1970:01 1994:06	-2,21 [1]	2,47 [3]	-2,82 [2]	-0,10 [3]
1980:01 1994:06	-2,60 [1]	1,98 [3]	-3,28 <sup>c</sup> [2]	-0,65 [3]
1985:01 1994:06	-1,66 [1]	2,13 [3]	-3,81 <sup>b</sup> [1]	-1,12 [1]

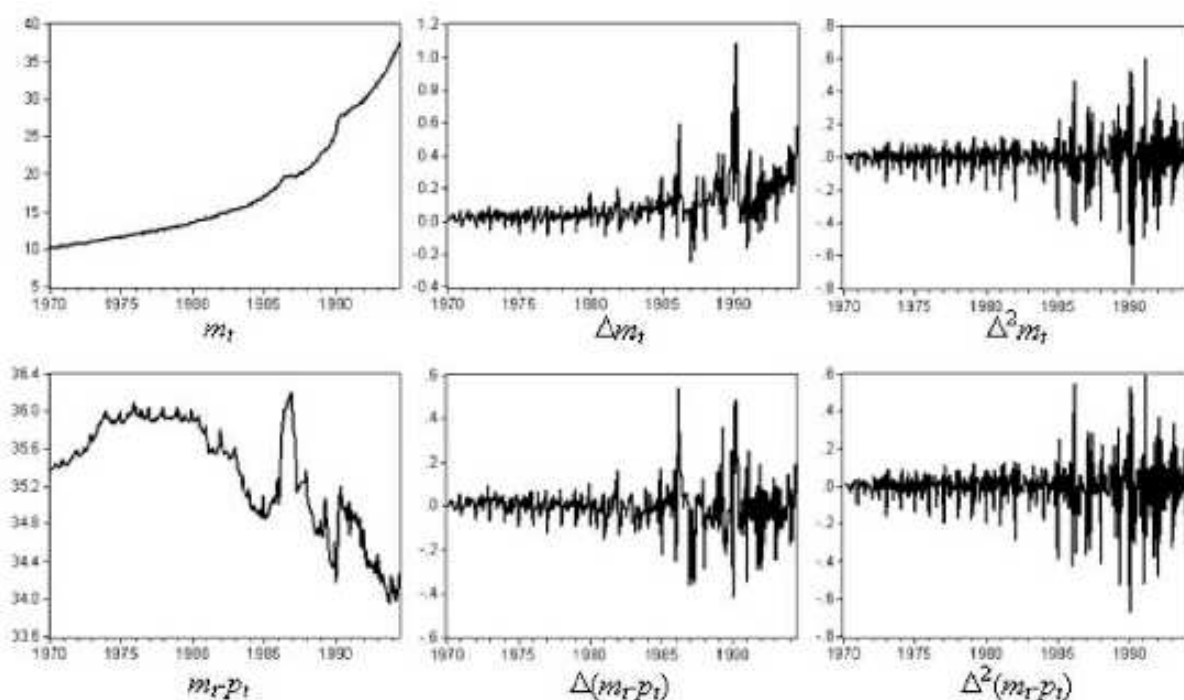
\* Os sobrescritos a, b e c indicam rejeição da hipótese nula de que a série possui raiz unitária a 1%, 5% e 10%, respectivamente. O número de defasagens incluídas foi escolhido de modo a minimizar o critério de informação de Schwartz. Os testes não foram realizados para os períodos que não incluem *inliers* ou *outliers* (1970:01-1979:12 e 1970:01-1985:01).

4 Os resultados encontrados são robustos a pequenas modificações das datas de início e término dos planos de estabilização.

### 3.2 Oferta Nominal de Moeda

No que tange à oferta nominal de moeda, percebe-se uma evolução semelhante à série de preços: aceleração da taxa de expansão monetária a partir do início da década de oitenta e presença de *inliers*, resultado do impacto dos planos de estabilização mal-sucedidos (ver Figura 2). Entretanto, a despeito das semelhanças, cabe ressaltar que, quando comparada à série  $\Delta p_t$ , a série  $\Delta m_t$  se mostra mais volátil e com um componente sazonal mais acentuado.

**Figura 2 – Gráficos das Séries relevantes de Oferta Nominal e Real de Moeda**



Assim como na seção 3.1, os testes convencionais (não reportados por economia de espaço) indicariam que a série de oferta nominal de moeda é um processo  $I(0)$ . No entanto, a presença de *inliers* (e *outliers*) pode estar viesando os testes aplicados. Nesse sentido, a execução dos testes modificados de raiz unitária apresentados na seção 3.1 seria desejável. Por conveniência, os testes serão realizados com as mesmas datas utilizadas na seção 3.1 para  $\Delta p_t$ .<sup>5</sup> Além disso, os *outliers* identificados para a série  $\Delta m_t$  foram 1986:03, 1989:12, 1990:02 e 1990:03. Note-se que os *outliers* identificados são observações de meses próximos aos planos Cruzado e Collor I. A Tabela 2 reporta os resultados dos testes modificados para  $\Delta m_t$ . Como no caso de  $\Delta p_t$ , os testes apontam que a série de fato possui raiz unitária.

<sup>5</sup> Novamente, os resultados são robustos a pequenas mudanças na datação dos *inliers*.



**Tabela 2 – Testes de Raiz Unitária Modificados para  $\Delta m_t$  \***

Período	$ADF(C_A)$	$ADF(C_B)$	$ADF(C_{AO})$	$ADF(C_{BO})$
1970:01 1994:06	-2,88 [2]	-3,10 [2]	-3,11 [2]	-1,60 [2]
1980:01 1994:06	-3,01 [2]	-3,10 [2]	-3,56 <sup>b</sup> [2]	-1,18 [2]
1985:01 1994:06	-1,80 [2]	-2,59 [2]	-3,97 <sup>b</sup> [2]	-2,30 [2]

\* Os sobrescritos a, b e c indicam rejeição da hipótese nula de que a série possui raiz unitária a 1%, 5% e 10%, respectivamente. O número de defasagens incluídas foi escolhido de modo a minimizar o critério de informação de Schwartz. Os testes não foram realizados para os períodos que não incluem *inliers* ou *outliers* (1970:01-1979:12 e 1970:01-1985:01).

### 3.3 Encaixes Monetários Reais

Com relação aos encaixes monetários reais, percebem-se comportamentos distintos em diferentes períodos. Até o final da década de setenta, nota-se o crescimento (para o início da década) ou manutenção do estoque real de moeda. A partir da década de oitenta, com a aceleração da inflação, percebe-se tendência de redução de  $m_t - p_t$ . Aliás, esse é um fato observado na grande maioria dos países que experimentaram altas taxas de inflação.<sup>6</sup>

A Tabela 3 ilustra essa afirmação: em todos os períodos a taxa de expansão monetária é superior à taxa de inflação, com exceção daquele compreendido entre 1970 e 1979. A diminuição do estoque real de moeda só é interrompida nos períodos imediatamente posteriores aos planos de estabilização, em especial os planos Cruzado e Collor I. Na primeira metade da década de oitenta, a redução do estoque real de moeda se mostrou especialmente acentuada: a taxa de inflação se mostrou 35% superior à taxa de expansão monetária.

**Tabela 3 – Taxa de Inflação e Expansão Monetária \***

Período	Taxa Média Mensal de Inflação ( $\pi$ )	Taxa Média Mensal do Crescimento da Oferta de Moeda ( $\dot{m}$ )	$\pi / \dot{m}$
1970:01 1994:06	10,17%	9,75%	1,04
1970:01 1979:12	2,31%	2,76%	0,84
1970:01 1985:01	4,06%	3,79%	1,07
1980:01 1994:06	7,45%	5,53%	1,35
1985:01 1994:06	20,30%	19,43%	1,04

\* Tem-se que  $\pi$  e  $\dot{m}$  são tais que  $P_T = P_0(1 + \pi)^T$  e  $M_T = M_0(1 + \dot{m})^T$ , em que  $P$  e  $M$  são os níveis dos preços e da oferta nominal de moeda, respectivamente.

6 Uma das possíveis explicações para esse fato é que, em períodos de alta inflação, os agentes buscam moedas estrangeiras e/ou moedas indexadas para substituir a moeda doméstica.

Os testes convencionais (não reportados por economia de espaço) apontam que as séries  $m_t - p_t$  e  $\Delta^2(m_t - p_t)$  são não-estacionária e estacionária, respectivamente. Com relação à série  $\Delta(m_t - p_t)$ , os resultados dependem do período e do teste utilizados: o teste Phillips-Perron rejeita a hipótese nula para todos os períodos enquanto o *ADF* rejeita para os períodos que incluem observações mais recentes (inclusive 1970:01 à 1994:06). Na verdade, em somente quatro casos, de todas as 20 combinações possíveis de testes, especificações e períodos, não foi rejeitada a hipótese nula de presença de raiz unitária. Desse modo, aparentemente a série de estoque real de moeda seria um processo  $I(1)$ .

No entanto, a presença de quebras estruturais tende a viesar os testes convencionais. A hipótese nula de não-estacionaridade seria aceita em circunstâncias em que as séries seriam, na verdade, estacionárias com quebras estruturais [Perron (1989)]. De fato, a série analisada aparenta possuir quebras estruturais. Nesse sentido, em Lumsdaine & Papell (1997) são propostos testes de raiz unitária cujas hipóteses alternativas consideram a possibilidade de ocorrência de duas quebras estruturais. Os testes são construídos a partir da regressão (9):

$$y_t = \bar{\omega} + \gamma + \bar{\omega}_1 DU1_t + \gamma_1 DT1_t + \bar{\omega}_2 DU2_t + \gamma_2 DT2_t + \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^k c_j y_{t-j} + \zeta_t, \quad (9)$$

em que  $DU1_t$  e  $DU2_t$  são variáveis que indicam mudanças na média nos períodos  $TB1$  e  $TB2$ , respectivamente (assumem valor 1 se  $t > TBi$  e 0 caso contrário, para  $i=1,2$ ),  $DT1_t$  e  $DT2_t$  são variáveis que indicam mudanças na tendência nos períodos  $TB1$  e  $TB2$ , respectivamente (assumem valor  $t - TBi$  se  $t > TBi$  e 0 caso contrário, para  $i=1,2$ ).

Os estimadores e as estatísticas relevantes são computados usando todas as observações para pares distintos de valores  $(t_1, t_2)$ , para  $t_1 = t_0, t_0 + 1, T - t_0, t_2 = t_0, t_0 + 1, T - t_0$ , com  $t_0 = T\nu_0$ ,  $t_1 \neq t_2$ ,  $t_1 \neq t_2 \pm 1$  e  $\nu_0$  representando alguma fração da amostra. Neste trabalho, utilizou-se  $\nu_0 = 0,15$ , tal como sugerido em Hansen (1992).

Denote-se  $\Upsilon$  o conjunto de pares distintos de valores  $(t_1, t_2)$  que preenchem as condições explicitadas no parágrafo anterior e defina-se  $T^* = \{\tau_1 = TB1/T, \tau_2 = TB2/T \text{ tal que } (TB1, TB2) \in \Upsilon\}$ . A hipótese nula é de que a série possui raiz unitária. A estatística de interesse é construída a partir da estatística  $t$  associada a essa hipótese  $[\hat{t}(\tau_1, \tau_2)]$ . Mais especificamente, a estatística-teste [denotada por *ADF(2Q)*] é:

$$ADF(2Q) = \inf_{(\tau_1, \tau_2) \in T^*} \hat{t}(\tau_1, \tau_2). \quad (10)$$

A escolha da defasagem  $k$  em (9) é feita segundo o procedimento proposto em Perron (1989). Começa-se com um limite superior ( $k_{\max}$ ) e testa-se sua significância. Caso seja significativo, escolhe-se  $k = k_{\max}$ . Caso contrário reduz-se  $k$  até que a última defasagem incluída seja significativa. Se nenhuma defasagem for significativa, escolhe-se  $k = 0$ .<sup>7</sup>

A especificação proposta em (9) equivale ao modelo CC de Lumsdaine & Papell (1997). A equação (9) com a omissão de  $DT1$  e  $DT2$  equivale ao modelo AA, e a mesma equação com a omissão de  $DT2$  equivale ao modelo CA. Os resultados dos testes, para os modelos CC, AA e CA e para diferentes períodos, estão reportados na Tabela 4 e Tabela 5 e trazem fortes evidências de que  $m_t - p_t \sim I(1)$ .

**Tabela 4 – Testes de Raiz Unitária com Quebra Estrutural para  $m_t - p_t$  \***

		Períodos				
		1970:01 1994:06	1970:01 1979:12	1970:01 1984:12	1980:01 1994:06	1985:01 1994:06
CC	TB1	1978:01	1971:12	1973:03	1986:02	1986:02
	TB2	1986:02	1973:08	1979:10	1990:02	1990:02
	$ADF(2Q)$	-5,458	-6,364	-5,023	-8,673 <sup>a</sup>	-8,153 <sup>a</sup>
	$k$	3	0	0	3	3
AA	TB1	1986:02	1972:08	1980:06	1986:02	1986:02
	TB2	1986:12	1976:12	1982:12	1986:12	1990:02
	$ADF(2Q)$	-5,280	-5,258	-4,301	-6,440 <sup>a</sup>	-5,874
	$k$	1	0	3	0	3
CA	TB1	1978:11	1973:03	1975:04	1986:02	1986:12
	TB2	1986:02	1976:12	1982:12	1990:02	1990:02
	$ADF(2Q)$	-5,342	-6,473 <sup>c</sup>	-5,027	-7,067 <sup>b</sup>	-7,658 <sup>a</sup>
	$k$	3	0	0	3	0

\* Os sobrescritos a, b e c indicam rejeição da hipótese nula de que a série possui raiz unitária a 1%, 5% e 10% de significância, respectivamente. Os valores críticos para o modelo CC são -7,34 (1%), -6,82 (5%) e -6,49 (10%). Para o modelo AA são -6,94 (1%), -6,24 (5%), -5,96 (10%). Para o modelo CA são -7,24 (1%), -6,65 (5%) e -6,33 (10%). Mais detalhes ver texto.

7 A princípio pretendia-se utilizar  $k_{\max} = 8$ , tal como em Lumsdaine & Papell (1997). No entanto, por motivos computacionais, utilizou-se  $k_{\max} = 4$ .

**Tabela 5 – Testes de Raiz Unitária com Quebra Estrutural para  $\Delta(m_t - p_t)$  \***

		Períodos				
		1970:01 1994:06	1970:01 1979:12	1970:01 1984:12	1980:01 1994:06	1985:01 1994:06
CC	TB1	1986:02	1973:12	1981:12	1986:02	1986:02
	TB2	1987:02	1975:12	1982:06	1987:05	1987:05
	<i>ADF(2Q)</i>	-20,641 <sup>a</sup>	-10,847 <sup>a</sup>	-14,159 <sup>a</sup>	-16,626 <sup>a</sup>	-13,617 <sup>a</sup>
	<i>k</i>	0	4	0	0	0
AA	TB1	1990:02	1973:12	1981:12	1990:02	1990:02
	TB2	1990:05	1975:12	1982:03	1990:05	1990:05
	<i>ADF(2Q)</i>	-20,099 <sup>a</sup>	-10,107 <sup>a</sup>	-12,240 <sup>a</sup>	-15,434 <sup>a</sup>	-12,630 <sup>a</sup>
	<i>k</i>	0	4	0	0	0
CA	TB1	1990:02	1971:02	1981:12	1990:02	1990:02
	TB2	1990:05	1972:08	1982:03	1990:05	1990:05
	<i>ADF(2Q)</i>	-20,154 <sup>a</sup>	-12,585 <sup>a</sup>	-14,273 <sup>a</sup>	-15,458 <sup>a</sup>	-12,823 <sup>a</sup>
	<i>k</i>	0	0	0	0	0

\* Os sobrescritos a, b e c indicam rejeição da hipótese nula de que a série possui raiz unitária a 1%, 5% e 10% de significância, respectivamente. Os valores críticos para o modelo CC são -7,34 (1%), -6,82 (5%) e -6,49 (10%). Para o modelo AA são -6,94 (1%), -6,24 (5%), -5,96 (10%). Para o modelo CA são -7,24 (1%), -6,65 (5%) e -6,33 (10%). Mais detalhes ver texto.

## 4 COINTEGRAÇÃO

### 4.1 Modelo de Cagan e Cointegração

As equações (2)-(6) implicam em algumas relações de longo prazo entre as variáveis do modelo. Estas relações estão resumidas na Proposição abaixo.

**Proposição 1 [Engsted (1993)]:** Seja  $m_t \sim I(2)$ ,  $p_t \sim I(2)$ ,  $\eta_{t+1} \equiv \Delta p_{t+1} - E_t(\Delta p_{t+1}) \sim I(0)$  e  $u_t \sim I(0)$ .<sup>8</sup> Então:

- (i)  $m_t - p_t \sim I(1)$ ;
- (ii)  $m_t - p_t$  cointegra com  $\Delta p_t$ , com vetor de cointegração  $(1; \lambda)$ ;
- (iii)  $m_t - p_t$  cointegra com  $\Delta m_t$ , com vetor de cointegração  $(1; \lambda)$ .

**Prova.** (i) Da equação (1) tem-se que  $m_t - p_t = \alpha - \lambda[E_t(p_{t+1}) - p_t] + u_t$ . Se  $p_t \sim I(2)$  e

<sup>8</sup> A respeito da plausibilidade da hipótese de que os erros de previsão ( $\eta_{t+1}$ ) são estacionários, dado que  $\Delta p_{t+1} \sim I(1)$ , ver Taylor (1991), p. 342-343.

$u_t \sim I(0)$  então o lado direito de (1) é  $I(1)$ . Desse modo, o lado esquerdo de (1) também é  $I(1)$ , ou seja,  $m_t - p_t \sim I(1)$ .

(ii) Subtraindo-se  $\lambda \Delta p_t$  de ambos os lados de (1) chega-se a [Taylor (1991)]:

$$m_t - p_t + \lambda \Delta p_t - \alpha = -\lambda(\Delta^2 p_{t+1}) + u_t - \lambda \eta_{t+1}. \quad (11)$$

Se  $p_t \sim I(2)$ ,  $\eta_{t+1} \equiv \Delta p_{t+1} - E_t(\Delta p_{t+1}) \sim I(0)$  e  $u_t \sim I(0)$  então o lado direito de (11) é estacionário. Desse modo, o lado esquerdo de (11) também é estacionário. Logo,  $m_t - p_t$  deve cointegrar com  $\Delta p_t$ , com vetor de cointegração  $(1; \lambda)$ .

(iii) Se  $m_t \sim I(2)$  e  $u_t \sim I(0)$ , então o lado direito da equação (6) é estacionário. Desse modo, o lado esquerdo de (6) também é estacionário. Logo,  $m_t - p_t$  deve cointegrar com  $\Delta m_t$ , com vetor de cointegração  $(1; \lambda)$ . ■

Caso as relações de cointegração denotadas pelas afirmações (ii) e (iii) da Proposição 1 sejam verdadeiras,  $\lambda$  pode ser estimado de modo superconsistente a partir da equação (6) ou (11) e posteriormente ser utilizado como um parâmetro conhecido na estimação de um modelo VAR específico (ver seção 5), tal como preconizado em Engle & Granger (1987).

Além disso, a estimação superconsistente do referido parâmetro independe da formulação exata do mecanismo de formação de expectativas ou da natureza exata do termo que denota choques na demanda por moeda ( $u_t$ ) [Engsted (1998)]. Somente é requerida estacionaridade dos erros de expectativa ( $\eta_{t+1}$ ) e dos choques na demanda por moeda. Desse modo, a validade das relações de cointegração expostas na Proposição 1 não permite inferência no que diz respeito ao processo de formação de expectativas, tampouco com relação a quanto da variação nos encaixes monetários reais se deve a  $u_t$ .<sup>9</sup>

## 4.2 Testes de Cointegração

A Tabela 6 apresenta os resultados dos testes de cointegração para diferentes períodos. Nota-se que para toda a amostra (1970:01 à 1994:06) e para o período 1970:01-1986:02 há fortes indícios de existência de cointegração entre os encaixes monetários reais e a variação da oferta nominal de moeda. No entanto, para o período 1986:03-1994:06 os testes de cointegração apontam para não validade da relação de cointegração entre  $m_t - p_t$  e  $\Delta m_t$ .

9 Esses temas serão abordados nas seções 5 e 6.

**Tabela 6 – Testes de Cointegração**

Período	Estatística *	H <sub>0</sub> : $r \leq 1$	H <sub>0</sub> : $r = 0$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	LR( $\lambda = 1/\pi$ )**
1970:01 1994:06	T	1,32	25,58 <sup>a</sup>	-36,04	6,78	1,000 (0,317)
	MA	1,32	24,26 <sup>a</sup>			
1970:01 1984:12	T	1,89	21,76 <sup>b</sup>	-36,55	23,07	1,000 (0,317)
	MA	1,89	19,86 <sup>b</sup>			
1985:01 1994:06	T	2,36	16,17	-36,24	7,34	1,000 (0,317)
	MA	2,36	13,81			

\* As siglas T e MA se referem respectivamente às estatísticas do traço e do máximo autovalor, como definidas em Johansen & Juselius (1990). Os sobrescritos a, b e c indicam rejeição da hipótese nula a 1%, 5% e 10% de significância, respectivamente.

\*\* Resultado do teste de razão de verossimilhança para hipótese nula de que  $\lambda$  é igual ao inverso da taxa de inflação mensal do período (ver seção 4.3 para detalhes). A estatística-teste tem distribuição  $\chi_1^2$  e o p-valor é reportado entre parênteses.

Os resultados encontrados são muito similares aos de Rossi (1994), no sentido em que não se encontra evidência de cointegração entre encaixes monetários reais e variação da oferta nominal de moeda no período que compreende os diversos planos de estabilização. Conforme salientado na seção 3.1, esse resultado pode ser gerado pela presença de quebras estruturais nas séries utilizadas. Nesse sentido, essas mudanças de regime poderiam afetar a constância dos parâmetros do vetor de cointegração.

Desse modo, pretende-se seguir Gregory & Hansen (1996) e realizar testes de cointegração que permitem a possibilidade de mudanças de regime. Mais especificamente, testa-se a hipótese nula de não existência de cointegração contra a hipótese alternativa de cointegração com mudança de regime em um período desconhecido. Os testes são baseados nos resíduos da regressão (12) e são análogos aos testes de raiz unitária da seção 3.3:

$$m_t - p_t = \alpha + \alpha_1 DU_t + \lambda \Delta m_t + \lambda_1 \Delta m_t DU_t + \varepsilon_t, \quad (12)$$

em que  $DU_t$  é variável que indica mudança na média no período  $TB$  (assume valor 1 se  $t > TB$  e 0 caso contrário),  $\alpha$  representa o intercepto antes da quebra estrutural,  $\alpha_1$  denota a variação do intercepto resultado da quebra estrutural,  $\lambda$  representa a inclinação antes da quebra estrutural,  $\lambda_1$  denota a variação de  $\lambda$  resultado da quebra estrutural.

Os estimadores e as estatísticas relevantes são computados usando todas as observações para valores distintos de  $t$ , para  $t = t_0, t_0 + 1, T - t_0$ , com  $t_0 = Tv_0$  e  $v_0$  representando alguma fração da amostra. Neste trabalho, utilizou-se  $v_0 = 0,15$ , tal como sugerido em Hansen (1992).

Denote-se  $\Upsilon$  o conjunto de valores de  $t$  que preenchem as condições explicitadas no parágrafo anterior e defina-se  $T^* = \{\tau = TB/T \text{ tal que } TB \in \Upsilon\}$ . A hipótese nula é de que os resíduos de (12) possuem raiz unitária sem quebra estrutural. A estatística de interesse é construída a partir da estatística  $t$  associada a essa hipótese  $[\hat{t}(\tau)]$ . São construídas três estatísticas distintas, cada uma associada a um teste de raiz unitária. As estatísticas são denotadas por  $Z_\alpha^*$ ,  $Z_t^*$  e  $ADF^*$ , sendo que as duas primeiras se referem ao teste Phillips-Perron e a terceira ao teste  $ADF$ :<sup>10</sup>

$$Z_\alpha^* = \inf_{\tau \in T^*} Z_\alpha(\tau), \quad (13a)$$

$$Z_t^* = \inf_{\tau \in T^*} Z_t(\tau), \quad (13b)$$

$$ADF^* = \inf_{\tau \in T^*} ADF(\tau). \quad (13c)$$

No entanto, é importante notar que os testes propostos em Gregory & Hansen (1996) não trazem muita evidência no que diz respeito à existência ou não de quebra estrutural, uma vez que a hipótese alternativa tem como caso particular o modelo usual de cointegração sem mudança de regime. De outro modo, a rejeição da hipótese nula implica em evidência da existência de uma relação de longo prazo entre as variáveis envolvidas, mas não traz inferência no que diz respeito a quebras estruturais nessa relação. Nesse sentido, é sugerido em Gregory & Hansen (1996) o uso das três estatísticas construídas em Hansen (1992), denotadas por  $Sup F$ ,  $Mean F$  e  $L_c$ , como complemento daquelas explicitadas em (13a), (13b) e (13c). O método de construção dessas estatísticas é similar ao utilizado em Gregory & Hansen (1996) e a derivação de cada uma não vai ser explicitada neste trabalho.

A Tabela 7 apresenta os resultados dos testes de cointegração propostos em Gregory & Hansen (1996) para a relação entre  $m_t - p_t$  e  $\Delta m_t$ . Nota-se que, para os três períodos analisados, há fortes evidências de existência de cointegração entre as referidas séries: a hipótese nula é rejeitada na maioria dos casos.

Também são reportados na Tabela 7 os resultados dos testes propostos em Hansen (1992) para a relação de cointegração entre  $m_t - p_t$  e  $\Delta m_t$ . Para toda a amostra rejeita-se fortemente a hipótese nula de constância dos parâmetros do vetor de cointegração: todas as estatísticas são altamente não significativas. Esse resultado corrobora as evidências encontradas para os testes usuais de cointegração (ver Tabela 6), que revelam variação

---

10 A diferença entre as estatísticas  $Z_\alpha^*$  e  $Z_t^*$  se refere ao uso da estimativa da variância de longo prazo dos resíduos do segundo estágio quando do cálculo de  $Z_\alpha$  e  $Z_t$ . Mais especificamente, a estimativa é utilizada em  $Z_t$  (e não em  $Z_\alpha$ ). Mais detalhes ver Gregory & Hansen (1996), p. 104-106.

substancial do parâmetro  $\lambda$  quando estimado para diferentes períodos. Aliás, as estimativas do período de ocorrência da quebra estrutural no vetor de cointegração apontam para uma mudança de regime na metade da década de oitenta (1985:04 ou 1984:12, dependendo da estatística), período de violenta aceleração inflacionária. Quando se considera o período 1970:01-1984:12 também existe evidência de quebra estrutural no vetor de cointegração. As estatísticas  $Mean F$  e  $L_c$  são altamente não significativas (embora a estatística  $Sup F$  seja somente significativa a 10%). Novamente o período de ocorrência da quebra estrutural (1978:11 ou 1979:02, dependendo da estatística) coincide com a aceleração da inflação.

**Tabela 7 – Cointegração com Mudanças de Regime e Testes de Quebra Estrutural**

Período	Cointegração com Mudança de Regime		Quebra Estrutural		
	Estatística-Teste *	TB	Estatística-Teste **		
1970:01 1994:06	$Z_\alpha^*$	-274,94 <sup>a</sup>	1985:04	$Sup F$	53,72 <sup>a</sup>
	$Z_t^*$	-15,91 <sup>a</sup>	1985:04	$Mean F$	35,89 <sup>a</sup>
	$ADF^*$	-5,09 <sup>b</sup>	1984:12	$L_c$	1,76 <sup>a</sup>
1970:01 1984:12	$Z_\alpha^*$	-210,07 <sup>a</sup>	1979:02	$Sup F$	10,44
	$Z_t^*$	-15,16 <sup>a</sup>	1979:02	$Mean F$	9,01 <sup>a</sup>
	$ADF^*$	-3,98	1978:11	$L_c$	1,50 <sup>a</sup>
1985:01 1994:06	$Z_\alpha^*$	-106,53 <sup>a</sup>	1986:12	$Sup F$	14,54 <sup>b</sup>
	$Z_t^*$	-9,97 <sup>a</sup>	1986:12	$Mean F$	2,89
	$ADF^*$	-4,32	1990:10	$L_c$	0,22

\* Hipótese nula de que as séries não cointegram. Os sobrescritos a, b e c indicam rejeição da hipótese nula a 1%, 5% e 10% de significância, respectivamente. Para  $Z_\alpha^*$  os valores críticos são -57,17 (1%), -47,07 (5%) e -41,85 (10%). Para  $Z_t^*$  e  $ADF^*$  os valores críticos são 0,898 (1%), 0,575 (5%) e 0,450 (10%).

\*\* Hipótese nula de que o vetor de cointegração não possui quebra estrutural. Os sobrescritos a, b e c indicam rejeição da hipótese nula a 1%, 5% e 10% de significância, respectivamente. Os valores críticos para  $Sup F$  são 16,2 (1%), 12,4 (5%) e 10,6 (10%). Para  $Mean F$  os valores críticos são 6,78 (1%), 4,57 (5%) e 3,73 (10%). Para  $L_c$  os valores críticos são 0,898 (1%), 0,575 (5%) e 0,450 (10%).

Para o período 1985:01-1994:06, a hipótese nula é fortemente aceita para as estatísticas  $Mean F$  e  $L_c$  e rejeitada para a estatística  $Sup F$  (ao nível de significância de 5%). Nesse sentido, parece não haver quebras estruturais no vetor de cointegração. No entanto, esse resultado pode mais uma vez estar sendo gerado pela presença de *inliers* no período (ver seção 3.1).



### 4.3 Cointegração e Imposto Inflacionário

No contexto do modelo descrito na seção 2 pode-se demonstrar que a taxa de crescimento dos preços e da oferta de moeda que maximiza a receita obtida com o imposto inflacionário é  $1/\lambda$  [Cagan (1956)]. Nesse sentido, as relações de cointegração expostas na Proposição 1 podem ser usadas para testar se a taxa de inflação observada é realmente aquela que maximiza essa receita.

A observação dos resultados desses testes na última coluna da Tabela 6 não permite rejeitar a hipótese nula de que  $\lambda = 1/\pi$  (onde  $\pi$  é a inflação mensal do período). Desse modo, há indícios de que, com as taxas de inflação observadas, o governo maximizou a receita auferida com o imposto inflacionário. No entanto, cabe salientar que a validade dessa conclusão depende da hipótese de que a semi-elasticidade não se altera para conceitos menos amplos de moeda, pois somente seria extraído imposto inflacionário de novas emissões de papel-moeda e pela depreciação do estoque de papel-moeda em circulação.<sup>11</sup> Aliás, os resultados encontrados aqui corroboram as evidências contidas em Phylaktis & Taylor (1993).

### 4.4 Cointegração e Bolhas

As relações de cointegração contidas na Proposição 1 também podem ser usadas para se testar a existência de bolhas racionais no âmbito do modelo exposto na seção 2. No entanto, cabe antes definir mais precisamente o que se entende por bolhas racionais.

**Definição 1 [Diba & Grossman (1988)]:** Tome-se a equação (2). Da equação (4), supondo-se

que as esperanças condicionais estão definidas e que a soma  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i E_t(m_{t+i} - u_{t+i})$  converge, a solução de (2) que reflete os fundamentos do mercado é:

$$F_t = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i E_t(m_{t+i} - u_{t+i}) \right] - \alpha. \quad (14)$$

No entanto, a classe completa de soluções de (4) é dada por:

$$p_t = F_t + B_t. \quad (15)$$

O termo  $B_t$  é qualquer variável aleatória que soluciona a equação (15) e pode

---

<sup>11</sup> Conforme salientado em Phylaktis & Taylor (1993), essa hipótese equivale a supor que a razão entre M1 e a base monetária é estacionária.

dependem tanto de  $m_{t+i}$  e  $u_{t+i}$  como de outras variáveis.<sup>12</sup>

$$E_t(B_{t+1}) - \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right) B_t = 0 \quad (16)$$

Perceba que, como  $\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right) > 1$ ,  $B_t$  explode em valor esperado:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_t(B_{t+i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^i B_t = \begin{cases} +\infty, & \text{se } B_t > 0, \\ -\infty, & \text{se } B_t < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Se  $B_t \neq 0$ , então se diz que existe uma bolha racional.

Note que a presença de bolhas racionais implica que os agentes têm expectativa de que o nível de preços domésticos não está sendo formado de acordo com o componente que reflete os fundamentos do mercado ( $F_t$ ). Do ponto de vista teórico, a condição de transversalidade imposta na equação (3) exclui a possibilidade de bolhas (nesse caso  $p_t = F_t$ ). Em outras palavras, a validade da afirmação (iii) da Proposição 1 depende da imposição da referida condição de transversalidade.<sup>13</sup> Nesse sentido, a Proposição 2 mostra que a validade da relação de cointegração expressa na afirmativa (iii) da Proposição 1 é incompatível com a presença de bolhas racionais.

**Proposição 2 [Diba & Grossman (1988)]:** Se  $(m_t - p_t) + \lambda \Delta m_t - \alpha \sim I(0)$ ,  $B_t = 0$ .

**Prova.** Suponha que  $B_t \neq 0$ . Desse modo, a equação (6), torna-se:

$$m_t - p_t + \lambda \Delta m_t - \alpha = -(1+\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i E_t(\Delta^2 m_{t+i}) + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i E_t(u_{t+i}) + B_t.$$

Como  $B_t$  é explosivo por construção [ver (17)], então  $(m_t - p_t) + \lambda \Delta m_t - \alpha$  não é estacionário. Logo, se  $(m_t - p_t) + \lambda \Delta m_t - \alpha \sim I(0)$  então  $B_t = 0$ . ■

Desse modo, diversos autores utilizam técnicas de cointegração para testar a presença de bolhas racionais [ver Diba & Grossman (1988), por exemplo]. No caso específico do modelo da seção 2, se  $m_t - p_t$  cointegrar com  $\Delta m_t$  e  $\Delta p_t$ , estaria excluída possibilidade de

12 Mais precisamente, de acordo com Diba & Grossman (1988), as soluções da equação (16) devem satisfazer à  $B_{t+1} - \frac{1+\lambda}{\lambda} B_t = \kappa_{t+1}$ , em que  $\kappa_{t+1}$  é uma variável aleatória (ou uma combinação de várias delas) gerada por um processo estocástico que satisfaz  $E_{t-i}(\kappa_{t+1}) = 0$  (para todo  $i \geq 0$ ).

13 No entanto, cabe notar que a afirmação (ii) da Proposição 1 vale independente da existência ou não de bolhas, uma vez que não foi imposta nenhuma condição de transversalidade em (11).

existência de bolhas racionais. No entanto, se o estoque real de moeda somente cointegrar com  $\Delta p_t$  (e não com  $\Delta m_t$ ), uma possível explicação seria a presença de bolhas racionais.

Sendo assim, os resultados descritos na seção 4.2 seriam indícios da ausência de bolhas racionais. No entanto, Evans (1991) salienta que os testes de cointegração usualmente aplicados não são adequados para detectar uma importante classe de bolhas racionais. Basicamente, o argumento é que esses testes, quando aplicados a bolhas que colapsam periodicamente, têm uma alta probabilidade de levar a conclusão de que esse tipo de bolha não está presente. Sendo assim, no que diz respeito à presença de bolhas racionais, os resultados dessa seção devem ser vistos com certa reserva.

## 5 TESTANDO AS RESTRIÇÕES DE EXPECTATIVAS RACIONAIS

As restrições de cointegração discutidas na seção 4 são condições necessárias, mas não suficientes, para garantir a validade do modelo da seção 2, se os agentes formam suas expectativas de maneira racional. A natureza exata das restrições associadas a essa hipótese depende das premissas que se assume a respeito de  $u_t$ .

Da equação (11), tem-se que:

$$\underbrace{(m_t - p_t) + \lambda \Delta p_{t+1} - \alpha}_{\xi_{t+1}} = u_t - \lambda \eta_{t+1}. \quad (18)$$

Sob a hipótese de expectativas racionais os erros de expectativa ( $\eta_{t+1}$ ) devem ser não correlacionados com  $I_t$ . No entanto,  $u_t$  pode ser correlacionado com  $I_t$ . Além disso, se  $u_t$  possui autocorrelação serial, também é correlacionado com o conjunto de informação em  $I_{t-i}$  (para todo  $i > 0$ ). Desse modo, se o modelo é exato, ou seja, se  $u_t = 0$  para todo  $t$ , então  $\xi_{t+1}$  não possui autocorrelação serial e é não correlacionado com as variáveis observáveis em  $t$  e nos períodos anteriores. Se o modelo é não exato e  $u_t$  é ruído branco, então  $\xi_{t+1}$  é não correlacionado com o conjunto de informação no período  $t-1$ . Nesse caso,  $\xi_{t+1}$  será  $MA(1)$ . De maneira geral, se  $u_t$  é  $MA(k)$ , então  $\xi_{t+1}$  é não correlacionado com o conjunto de informação em  $t-k-1$  e será  $MA(k+1)$ .

Defina-se o conjunto de informação  $H_t^k \equiv \{\Delta^2 m_{t-j}, S_{t-j}, 0 \leq j \leq k\} \subseteq I_t$ . Projetando os dois lados de (18) em  $H_t$  tem-se que:

$$E[\xi_{t+1} \equiv (m_t - p_t) + \lambda \Delta p_{t+1} - \alpha \mid H_t^k] = 0. \quad (19)$$

Note que a equação (19) é uma condição de ortogonalidade e como tal pode ser testada do seguinte modo: (i) constrói-se  $\xi_{t+1}$  utilizando-se a estimativa de  $\alpha$  e  $\lambda$  obtida das relações de cointegração; (ii) regride-se  $\xi_{t+1}$  nas variáveis de  $H_t^k$ ; (iii) testa-se a significância estatística dessa regressão.<sup>14</sup>

Alternativamente, tomando-se a equação (6) nota-se que, para o modelo exato,  $S_t \equiv (m_t - p_t) + \lambda \Delta m_t - \alpha$  é o predictor ótimo do valor presente das mudanças futuras no crescimento da oferta de moeda. Esta afirmação implica certas restrições nos parâmetros do modelo VAR abaixo:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 m_t \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(L) & b(L) \\ c(L) & d(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^2 m_{t-1} \\ S_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

em que  $L$  é o operador defasagem,  $a(L)$ ,  $b(L)$ ,  $c(L)$  e  $d(L)$  são polinômios em  $L$ ,  $e_{1t}$  e  $e_{2t}$  são os termos de erro.

Entretanto, o modelo definido em (20) também pode ser escrito no seguinte formato:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta^2 m_t \\ \vdots \\ \Delta^2 m_{t-k+1} \\ S_t \\ \vdots \\ S_{t-k+1} \end{bmatrix}}_{Z_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_k & b_1 & \cdots & b_k \\ & & I_{k-1} & & & 0 \\ c_1 & \cdots & c_k & d_1 & \cdots & d_k \\ & & I_{k-1} & & & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta^2 m_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta^2 m_{t-k} \\ S_{t-1} \\ \vdots \\ S_{t-k} \end{bmatrix}}_{Z_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_{1t} \\ 0 \\ e_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_t}. \quad (21)$$

Definam-se os vetores  $g$  e  $h$  tal que selecionem respectivamente as equações de (21) referentes à  $\Delta^2 m_t$  e  $S_t$ . Sendo assim, as previsões relativas a valores futuros de  $\Delta^2 m_t$  podem ser geradas como  $E(\Delta^2 m_{t+i} \mid H_t^k) = gA^i Z_t$ . Projetando cada lado da equação em  $H_t^k$  e notando que  $S_t \subset H_t^k$  e (por hipótese)  $u_t = 0$  para todo  $t$ , chega-se a:

$$S_t = hZ_t = -\lambda gA(I - BA)^{-1} Z_t. \quad (22)$$

Percebe-se que (22) define um conjunto de restrições não-lineares com relação aos parâmetros de (20). No entanto, eliminando  $Z_t$  e pré-multiplicando ambos os lados de (22) por  $(I - BA)$  chega-se a um conjunto de restrições lineares denotado por:

14 Note-se que esta maneira de se testar a hipótese de expectativas racionais não é adequada se  $u_t$  segue um processo  $AR(p)$ , pois  $\xi_{t+1}$  será correlacionado com todas as defasagens das variáveis do conjunto de informação [lembre-se que um  $AR(p)$  pode ser escrito como  $MA(\infty)$ ] [Engsted (1998)].

$$h(I - bA) = -\lambda gA. \quad (23)$$

Não é difícil demonstrar que, em termos dos parâmetros de (20) ou (21), a equação (23) implica nas restrições expressas em (24a), (24b) e (24c).

$$c_i = (1 + \lambda)a_i \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad (24a)$$

$$d_1 = (1 + \lambda)\left(\frac{1}{\lambda} + b_1\right), \quad (24b)$$

$$d_i = (1 + \lambda)b_i \quad \forall i = 2, \dots, k. \quad (24c)$$

Note-se que os dois procedimentos descritos nesta seção são equivalentes. A Proposição 3 formaliza esta afirmação.

**Proposição 3 [Engsted (1998)]:** A estatística-teste para a validade das restrições do modelo VAR expressas em (24a), (24b) e (24c) é numericamente idêntica à estatística-teste para a significância da regressão de  $\xi_{t+1}$  em valores correntes e defasados de  $\Delta^2 m_t$  e  $S_t$ .

**Prova.** Tome-se o modelo descrito em (20). Adiantando ambas as equações em um período, impondo as restrições descritas em (24a), (24b) e (24c) e multiplicando a primeira equação por  $(1 + \lambda)$  chega-se a:

$$\begin{bmatrix} (1 + \lambda)\Delta^2 m_{t+1} \\ S_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_k & b_1 & \dots & b_k \\ a_1 & \dots & a_k & \frac{1}{\lambda} + b_1 & \dots & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 + \lambda)\Delta^2 m_{t-k+1} \\ (1 + \lambda)S_t \\ \vdots \\ (1 + \lambda)S_{t-k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Subtraindo a segunda equação da primeira tem-se que:

$$S_{t+1} - \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda)S_t - (1 + \lambda)\Delta^2 m_{t+1} = e_{1t} - e_{2t}. \quad (26)$$

Note que  $S_{t+1} - \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda)S_t - (1 + \lambda)\Delta^2 m_{t+1} = -\frac{1}{\lambda}\xi_{t+1}$  [tal como definido em (18)].

Multiplicando ambos os lados por  $-\lambda$  e tomando a esperança condicional à  $H_t^k \subseteq I_t$  tem-se:

$$E(\xi_{t+1} | H_t^k) = 0. \quad (27)$$

Perceba que (27) é equivalente à condição de ortogonalidade definida por (19). Desse modo, as estatísticas em questão são numericamente idênticas. ■

A Tabela 8 reporta os resultados da regressão de  $\xi_{t+1}$  nas variáveis de  $H_t^k$  (valores correntes e defasados de  $\Delta^2 m_t$  e  $S_t$ ). Note que  $S_t$  foi construído a partir das estimativas dos

parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$ , reportadas na Tabela 6. Além disso, cabe salientar que a referida regressão foi estimada para toda a amostra (1970:01-1994:06) e para os períodos 1970:01-1984:12 e 1985:01-1994:12.<sup>15</sup> O modelo de Cagan exato sob expectativas racionais é rejeitado para os três períodos: a estatística-teste é significativa para todos os casos reportados na Tabela 8. Esse resultado é bastante robusto ao número de defasagens de  $\Delta^2 m_t$  e  $S_t$  incluídas na regressão, ou seja, ao  $H_t^k$  escolhido.<sup>16</sup>

**Tabela 8 – Teste do Modelo de Cagan Exato sob Expectativas Racionais**

Período	Defasagem Máxima	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	Estatística-Teste *
1970:01 1994:06	1	-36,04	6,78	28,32 (0,000)
1970:01 1994:06	2	-36,04	6,78	19,58 (0,000)
1970:01 1994:06	3	-36,04	6,78	15,19 (0,000)
1970:01 1994:06	4	-36,04	6,78	12,52 (0,000)
1970:01 1994:06	5	-36,04	6,78	10,41 (0,000)
1970:01 1984:12	1	-36,55	23,07	169,68 (0,000)
1970:01 1984:12	2	-36,55	23,07	99,56 (0,000)
1970:01 1984:12	3	-36,55	23,07	79,25 (0,000)
1970:01 1984:12	4	-36,55	23,07	65,47 (0,000)
1970:01 1984:12	5	-36,55	23,07	56,26 (0,000)
1985:01 1994:06	1	-36,24	7,37	28,36 (0,000)
1985:01 1994:06	2	-36,24	7,37	16,11 (0,000)
1985:01 1994:06	3	-36,24	7,37	12,19 (0,000)
1985:01 1994:06	4	-36,24	7,37	9,62 (0,000)
1985:01 1994:06	5	-36,24	7,37	8,06 (0,000)

\* Resultado do teste  $F$  para significância conjunta dos regressores (p-valores entre parênteses).

Uma das possíveis explicações a rejeição do modelo de Cagan exato sob expectativas racionais é o modo como os choques na demanda por moeda ( $u_t$ ) foram modelados. Uma especificação alternativa poderia contemplar a possibilidade de autocorrelação serial entre os choques, por exemplo. No entanto, o propósito desta seção foi apenas verificar a existência de

15 A princípio, não faria sentido estimar a regressão para o período 1985:01-1994:06, pois nesse período as restrições de cointegração não foram satisfeitas para os testes tradicionais. No entanto, como os testes de cointegração que permitem quebras estruturais rejeitam a hipótese nula de não-cointegração estimou-se a regressão para esse período (ver seção 4).

16 Na Tabela 8 foram reportados somente os resultados para as regressões estimadas com até cinco defasagens de  $\Delta^2 m_t$  e  $S_t$ . No entanto, os resultados se mantêm quando são acrescentados mais defasagens, ou seja, quando o conjunto  $H_t^k$  é ampliado.

choques estatisticamente significativos na demanda por moeda e não explorar sua magnitude. Esta tarefa será deixada para a próxima seção.

## 6 CHOQUES NA DEMANDA POR MOEDA

Testes estatísticos formais tais como os derivados na seção 5 são bastante comuns na literatura de expectativas racionais. No entanto, há certa dificuldade em se interpretar economicamente os resultados desses testes. Se o teste não rejeita as restrições, conclui-se que o modelo é válido, caso contrário considera-se que o modelo não é válido. O problema dessa abordagem é que se presume que o modelo econômico pode ser formulado no contexto de um modelo probabilístico completo. Desse modo, o modelo deve descrever todos os aspectos das séries observadas, ou seja, a diferença entre as previsões do modelo e as observações deve ser um ruído branco. Se esse não é o caso, os testes estatísticos como os mostrados na seção anterior perdem sua fundamentação básica. No entanto, em muitos casos, modelos de valor presente não devem ser encarados como modelos verdadeiros da realidade, mas aproximações que são capazes de descrever certos aspectos dos dados (mas não todos). Na verdade, se um modelo econômico é uma abstração da realidade, então testes estatísticos devem rejeitá-lo, se possuem poder suficiente. Entretanto, nada pode ser dito sobre quão boa é a aproximação que o modelo faz da realidade. Nesse sentido, especificamente com relação ao modelo descrito na seção 2, os resultados indicam que deve haver choques significativos de demanda, mas não trazem nenhuma informação sobre sua magnitude. Sendo assim, seria interessante a construção de medidas explícitas desta magnitude.

Seguindo Durlauf & Hall (1989a, b), tome-se a equação (4) e defina-se  $\tilde{p}_t$ :

$$\tilde{p}_t = -\alpha + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i m_{t+i}. \quad (28)$$

Note que:

$$E_t(\tilde{p}_t) = -\alpha + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i E_t(m_{t+i}). \quad (29)$$

Das equações (4), (28) e (29), considere um modelo de componentes não observáveis:

$$p_t = E_t(\tilde{p}_t) + n_t, \quad (30a)$$

$$\tilde{p}_t = E_t(\tilde{p}_t) + \omega_t, \quad (30b)$$

em que  $n_t \equiv -\left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^i E_t(u_{t+i})$  e  $\omega_t \equiv \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i m_{t+i} - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i E_t(m_{t+i}) \right]$ .

Note que  $n_t$  pode ser encarado como o “ruído de longo prazo” do modelo (ou seja, uma medida da magnitude dos choques na demanda por moeda) e que  $\omega_t$  é o erro de previsão de  $\tilde{p}_t$ . Perceba também que  $p_t$  e  $\tilde{p}_t$  são variáveis observáveis, enquanto  $E_t(\tilde{p}_t)$ ,  $n_t$  e  $\omega_t$  são não-observáveis. Desse modo, a partir de (30a) e (30b) pode ser estimada uma medida da magnitude dos desvios do modelo exato.

Defina o conjunto de informação  $\Phi_t \subseteq I_t$ , e denote por  $M_{\Phi_t}$  a projeção linear em  $\Phi_t$ . De (30a) e (30b) tem-se que:

$$p_t - \tilde{p}_t = n_t - \omega_t. \quad (31)$$

Como sob a hipótese de expectativas racionais  $\omega_t$  é ortogonal à  $\Phi_t$ , a projeção do lado esquerdo de (31) em  $\Phi_t$  é igual à projeção de  $n_t$  em  $\Phi_t$ . Sendo assim, as previsões geradas pela regressão de  $(p_t - \tilde{p}_t)$  nas variáveis de  $\Phi_t$ ,  $M_{\Phi_t}(p_t - \tilde{p}_t)$  são uma medida da magnitude dos choques na demanda por moeda. Em Durlauf & Hall (1989b) é demonstrado que a variância de  $M_{\Phi_t}(p_t - \tilde{p}_t)$  é um limite inferior para a variância do verdadeiro (mas não observável) termo de ruído ( $n_t$ ). Além disso, se  $\Phi_t$  contém valores correntes e defasados de  $m_t$  e  $p_t$ ,  $M_{\Phi_t}(p_t - \tilde{p}_t)$  será uma estimativa ótima do ruído do modelo. Então, todas as implicações testáveis do modelo estão contidas no requerimento de que  $(p_t - \tilde{p}_t)$  deve ser não correlacionado com as variáveis de  $\Phi_t$ . Como consequência, os testes de restrições relativas à hipótese de expectativas racionais, como os da seção 5, podem ser interpretados dentro desse arcabouço.<sup>17</sup>

Alternativamente, a abordagem de Campbell & Shiller (1987) parte da estimação do modelo VAR irrestrito descrito em (20) e da geração de previsões do valor presente das mudanças futuras no crescimento da oferta de moeda,  $S'_t$  [ver equação (22)]:

$$S'_t = -\lambda g A (I - bA)^{-1} Z_t. \quad (32)$$

Note que, se o modelo é exato ( $u_t = 0$  para todo  $t$ ),  $S'_t = S_t$ . Perceba também que:

$$S_t - S'_t = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i E(u_{t+i} | H_t^k) \equiv E(n_t | H_t^k). \quad (33)$$

---

<sup>17</sup> Especificamente com relação ao teste descrito na seção 5, basta definir  $\Phi_t$  como  $H_t^k$ .



A diferença entre  $S_t$  e  $S'_t$  é uma estimativa dos desvios do modelo exato, pois mede a previsibilidade dos choques na demanda por moeda. A observação da equação (33) permite concluir que desvios grandes do modelo exato requerem que movimentos em  $u_t$  sejam previsíveis muitos períodos adiante. Nesse sentido,  $S_t - S'_t$  fornece uma indicação da importância econômica de uma rejeição estatística das restrições (24a), (24b) e (24c).<sup>18</sup>

Uma vez que  $E(n_t | H_t^k)$  é por definição igual à projeção de  $n_t$  em  $H_t^k$  [ $M_{H_t}(n_t)$ ], as duas abordagens são equivalentes quando  $H_t^k$  e  $\Phi_t$  são idênticos. A princípio, a projeção de  $(p_t - \tilde{p}_t)$  em  $H_t^k$  gera uma estimativa dos desvios do modelo exato que é igual à estimativa dada por  $S_t - S'_t$ . No entanto, a abordagem proposta por Durlauf & Hall (1989a, b) enfrenta o problema prático de se construir  $\tilde{p}_t$  a partir de amostras finitas. Para contornar esta dificuldade, Durlauf & Maccini (1995) sugerem utilizar a equação (18) em vez de (4). Note que (18) é equivalente à (31) com  $(p_t - \tilde{p}_t)$  e  $\omega_t$  substituídos por  $\xi_{t+1}$  e  $-\lambda\eta_{t+1}$  respectivamente. Sendo assim, uma estimativa dos desvios do modelo exato pode ser construída a partir da projeção linear  $M_{\Phi_t}(\xi_{t+1})$ . A variância dessa projeção é um limite inferior da variância do verdadeiro ruído do modelo. Nesse sentido, Durlauf & Maccini (1995) sugerem a construção de uma medida tal como explicitada abaixo:

$$\Lambda_{DM} = \frac{Var[M_{\Phi_t}(\xi_{t+1})]}{Var(\xi_{t+1})}. \quad (34)$$

em que  $Var$  denota variância.

Perceba que  $\Lambda_{DM}$  pode ser interpretada como um limite inferior da percentagem de  $Var(\xi_{t+1})$  que pode ser atribuída ao ruído. Note também que  $\Lambda_{DM}$  pode ser computado como o  $R^2$  da regressão de  $\xi_{t+1}$  nas variáveis de  $\Phi_t$  [Engsted (1998)].

Além disso, a partir da abordagem de Campbell & Shiller (1987) pode ser construída uma estimativa da magnitude dos desvios do modelo exato [Engsted (2002)]:

$$\Lambda_{CS} = \frac{Var(S_t - S'_t)}{Var(S_t)}. \quad (35)$$

Como  $\Lambda_{DM}$  é baseado na equação (1) [ou (18)] e  $\Lambda_{CS}$  é construído a partir de (6) [ou (4)], Engsted (1998) as interpreta respectivamente como medidas de desvios de curto prazo

---

18 Se o modelo é exato, a equação (6) mostra que  $S_t$  é o previsor ótimo das mudanças futuras do crescimento da oferta de moeda. Então, pode-se interpretar que  $S_t - S'_t$  mede em que extensão os encaixes monetários reais são um previsor racional das mudanças futuras do crescimento da oferta de moeda [Engsted (1994)].

(um período) e longo prazo do modelo exato.<sup>19</sup>

A Tabela 9 traz as estimativas de  $\Lambda_{DM}$  e  $\Lambda_{CS}$  para diferentes conjuntos de informação ( $H_t^k$  ou  $\Phi_t$ , conforme o caso). Primeiramente cabe notar que as estimativas são sensíveis ao conjunto de informação utilizado. Nota-se que há evidência de um componente significativo de ruído. A medida  $\Lambda_{DM}$  indica que os choques respondem por entre 51% e 64% da variação na demanda por moeda. Além disso, a despeito de  $S_t$  e  $S'_t$  serem altamente correlacionados,  $S_t$  varia muito mais do que  $S'_t$ . Sendo assim, a medida  $\Lambda_{CS}$  sugere que os choques representam aproximadamente entre 73% e 99% das variações na demanda por moeda.

**Tabela 9 – Medidas da Magnitude dos Choques na Demanda por Moeda**

Período	Defasagem Máxima	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\Lambda_{DM}$	$\Lambda_{CS}$
1970:01 1994:06	1	-36,04	6,78	0,512	0,995
1970:01 1994:06	2	-36,04	6,78	0,526	0,825
1970:01 1994:06	3	-36,04	6,78	0,539	0,792
1970:01 1994:06	4	-36,04	6,78	0,551	0,788
1970:01 1994:06	5	-36,04	6,78	0,555	0,783
1970:01 1994:06	6	-36,04	6,78	0,560	0,779
1970:01 1994:06	7	-36,04	6,78	0,562	0,769
1970:01 1994:06	8	-36,04	6,78	0,563	0,766
1970:01 1994:06	9	-36,04	6,78	0,587	0,741
1970:01 1994:06	10	-36,04	6,78	0,639	0,734

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados da seção 4 apontam na direção da validade do modelo de Cagan (1956), tal como desenvolvido na seção 2. Em outras palavras, testes de cointegração mostram que as relações de longo prazo entre o estoque real de moeda e a taxa de expansão monetária implicadas por esse modelo não podem ser rejeitadas. Essa afirmação vale para o período 1970:01-1994:06 e para diversos subperíodos e é robusta à aplicação de técnicas econométricas que levam em consideração a possibilidade de quebras estruturais nos parâmetros do vetor de cointegração. Entretanto, o mesmo não pode ser dito com relação ao

<sup>19</sup> Para uma resenha sobre medidas de ruídos em modelos de expectativas racionais ver Engsted (2002).

período 1985:01-1994:06. Uma das explicações possíveis é a presença de *inliers*. Ademais, há fortes indícios de que os parâmetros do vetor de cointegração, ou seja, os parâmetros relevantes do modelo mudam ao longo do tempo. Mais especificamente, observa-se mudança da semi-elasticidade da demanda por moeda com relação à inflação esperada em dois episódios: no final da década de setenta e em meados da década de oitenta, ambos os períodos que marcaram a aceleração do processo inflacionário.<sup>20</sup> Uma possível extensão do presente trabalho seria, tal como em Phylaktis & Taylor (1993), verificar se o fenômeno de substituição da moeda local por moeda e/ou ativos estrangeiros foi relevante.

Além disso, as evidências de cointegração entre as variáveis relevantes do modelo apontam para não existência de bolhas racionais. Entretanto, de acordo com Evans (1991), esta evidência é válida somente para bolhas que sempre se expandem. Para o caso de bolhas que colapsam periodicamente, as técnicas utilizadas nesse trabalho não se mostram adequadas. Desse modo, as evidências encontradas não são suficientes para excluir a possibilidade de presença de bolhas racionais. Nesse sentido, uma extensão natural deste trabalho é a aplicação de testes que permitam inferir a existência (ou melhor, a não existência) de bolhas que colapsam periodicamente [ver Hall, Psaradakis & Sola (1999), por exemplo].

As relações de cointegração estimadas também permitiram testar a hipótese de que o governo escolhe a taxa de inflação que maximiza as receitas obtidas com o imposto inflacionário. Assim como em Phylaktis & Taylor (1993), os resultados parecem indicar que, de fato, a taxa de inflação observada é aquela que maximiza essas receitas.

O modelo desenvolvido neste trabalho permite estimativas dos parâmetros relevantes sem a necessidade de qualquer hipótese sobre o processo de formação de expectativas. No entanto, essas estimativas podem ser utilizadas para se testar a hipótese de que os agentes possuem expectativas racionais. Os resultados obtidos permitiram rejeitar fortemente essa hipótese, o que implicaria que os choques na demanda por moeda ( $u_t$ ) são estatisticamente significativos. Nesse sentido, estimativas da magnitude desses choques apontam que  $u_t$  responde por uma parcela muito grande das variações na demanda por moeda (entre 51% e 99%, dependendo da estimativa utilizada).

Por fim, cabe encarar este trabalho como um primeiro passo na direção do entendimento da dinâmica dos preços e da demanda por moeda no período de alta inflação experimentado pelo Brasil. Nesse sentido, uma possível extensão seria o uso de testes que

---

20 Entretanto, não se pode afirmar o mesmo com relação à elasticidade da demanda por moeda, pois esta depende da própria expectativa de inflação (ver seção 2), uma variável não observada.

permitem múltiplas quebras estruturais no modelo de cointegração [Hansen (2003)]. No entanto, tais técnicas ainda não acomodam a determinação endógena da data de tais quebras. Outra extensão possível é a inclusão de outras variáveis explicativas no modelo, tais como a variância da inflação esperada [ver Tourinho (1997), por exemplo]. Por fim, em contrapartida aos modelos com variáveis  $I(2)$ , outra possibilidade seria investigar os mecanismos geradores da inflação e estimar os parâmetros do modelo através de modelos VAR com raízes explosivas, tal como em Juselius & Mladenovic (2002).

## REFERÊNCIAS

- CAGAN, P. (1956). The Monetary Dynamics of Hyperinflation. In: Friedman, M. *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: University of Chicago Press.
- CAMPBELL, J. Y., SHILLER, R. J. (1987). Cointegration and Test of Present Value Models. *Journal of Political Economy*, v. 95, p. 1062-1088.
- CAMPÊLO, A. K., CRIBARI-NETO, F. (2003). Inflation Inertia and Inliers: The Case of Brazil. *Revista Brasileira de Economia*, v. 54, p. 713-739.
- CARNEIRO, D. D., MODIANO, E. (1990). Ajuste Externo e Desequilíbrio Interno: 1980-1994. In: Abreu, M. P. (org.). *A Ordem do Progresso*. Rio de Janeiro: Campus, p. 323-346.
- CATI, R. C., GARCIA, M. G. P., PERRON, P. (1999). Unit Roots in the Presence of Abrupt Governmental Interventions with Application to Brazilian Data. *Journal of Applied Econometrics*, v. 14, p. 27-56.
- DIBA, B. T., GROSSMAN, H. I. (1988). Explosive Rational Bubbles in Stock Prices. *The American Economic Review*, v. 78, p. 520-530.
- DURLAUF, S. N, HALL, R. E. (1989a). Measuring Noise in Stock Prices. *Stanford University Working Paper*.
- DURLAUF, S. N, HALL, R. E. (1989b). Bounds on the Variances of Especification Errors in Models with Expectations. *NBER Working Paper*, n. 2936.
- DURLAUF, S. N., MACCINI, L. J. (1995). Measuring Noise in Inventory Models. *Journal of Monetary Economics*, v. 36, p. 65-90.
- ENGLE, R. F., GRANGER, C. W. J. (1987). Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. *Econometrica*, v. 55, p. 251-276.
- ENGSTED, T. (1993). Cointegration and Cagan's Model of Hyperinflation under Rational

- Expectations. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 25, p. 350-360.
- ENGSTED, T. (1994). The Classic European Hyperinflations Revisited: Testing the Cagan Model Using a Cointegrated VAR Approach. *Economica*, v. 61, p. 331-343.
- ENGSTED, T. (1996). The monetary model of the exchange rate under hyperinflation: New encouraging evidence. *Economics Letters*, v. 51, p. 37-44.
- ENGSTED, T. (1998). Money Demand During Hyperinflation: Cointegration, Rational Expectations, and the Importance of Money Demand Shocks. *Journal of Macroeconomics*, v. 20, p. 533-552.
- ENGSTED, T. (2002). Measures of Fit for Rational Expectation Models. *Journal of Economic Surveys*, v. 16, p. 301-355.
- EVANS, G. W. (1991). Pitfalls in Testing for Explosive Bubbles in Asset Prices. *The American Economic Review*, v. 81, p. 922-930.
- GRAY, J. A. (1984). Dynamic Instability in Rational Expectations Models: An Attempt to Clarify. *International Economic Review*, v. 25, p. 93-122.
- GREGORY, A. W., HANSEN, B. E. (1996). Residual-based tests for cointegration in models with regime shifts. *Journal of Econometrics*, v. 70, p. 99-126.
- HALL, S. G., PSARADAKIS, Z., SOLA, M. (1999). Detecting Periodically Collapsing Bubbles: a Markov-Switching Unit Root Test. *Journal of Applied Econometrics*, v. 14, p. 143-154.
- HANSEN, P. H. (2003). Structural changes in the cointegrated vector autoregressive model. *Journal of Econometrics*, v. 114, p. 261-295.
- HANSEN, B. E. (1992). Tests for Parameter Instability in Regressions with I(1) Processes. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 10, p. 321-335.
- JOHANSEN, S. & JUSELIUS, K. (1990). Maximum Likelihood Estimation and Inferences on Cointegration-with applications to the demand for money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, v. 52, p. 169-210.
- JUSELIUS, K., MLADENOVIC, Z. (2002). High Inflation, Hyperinflation and Explosive Roots. The Case of Yugoslavia. *University of Copenhagen Institute of Economics Discussion Paper*, n. 02-23.
- LUMSDAINE, R. L., PAPELL, D. H. (1997). Multiple Trend Breaks and the Unit-Root Hypothesis. *The Review of Economics and Statistics*, v. 79, p. 212-218.
- MICHAEL, P., NOBAY, A. R., PEEL, D. A. (1994). The German Hyperinflation and the Demand for Money Revisited. *International Economic Review*, v. 35, p. 1-22.
- PERRON, P. (1989). The Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis.

- Econometrica*, v. 57, p. 1361-1401.
- PERRON, P., RODRÍGUEZ, G. (2003). Searching for Additive Outliers in Nonstationary Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, v. 24, p. 193-220.
- PHYLAKTIS, K., TAYLOR, M. P. (1993). Money Demand, The Cagan Model and The Inflation Tax: Some Latin American Evidence. *The Review of Economics and Statistics*, v. 75, p. 32-37.
- ROSSI, J. W. (1994). O modelo hiperinflacionário da demanda por moeda de Cagan e o caso do Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 24, p. 73-95.
- TAYLOR, M. P. (1991). The Hyperinflation Model of Money Demand Revisited. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 23, p. 327-351.
- TOURINHO, O. A. F. (1997). The Demand and Supply of Money Under High Inflation: Brazil 1974-1994. *Revista de Econometria*, v. 17, p. 87-118.
- VOGELSANG, T. J. (1999). Two simple Procedures for Testing for a Unit Root when there are Additive Outliers. *Journal of Time Series Analysis*, v. 20, p. 237-252.
- YASHIV, E. (1994). Money Demand in a High Inflation Economy: The Case of Israel. *The Review of Economics and Statistics*, v. 76, p. 186-191.