Avaliação de Empresas – FGV-MFEE
Lista de exercícios 3

Professor: Edson Gonçalves
Monitor: Diogo Saraiva

Gabarito

Definição Equilíbrio de Nash: No equilíbrio de Nash, a estratégia de cada jogador é a melhor resposta para as estratégias jogadas por seus rivais. Nenhum jogador tem incentivo em desviar.

1ª questão

Considere a matriz abaixo como forma de representar um jogo entre dois jogadores:

		Jogador 2	
		Cooperar (C)	Desertar (D)
Jogador 1	Cooperar (C)	(x,x)	(z,y)
	Desertar (D)	(y,z)	(w,w)

As relações entre os ganhos x,y,w e z podem levar a não existência de equilíbrio, a existência de 1 único equilíbrio e a até mais de um equilíbrio.
Para os itens abaixo, identifique as estratégias puras de equilíbrio. JUSTIFIQUE suas respostas.

a) $y>x>w>z$
b) $x>w>y>z$
c) $x=w>y=z$
d) $y>x>z>w$

Solução:

a) EN= {(D,D)}

		Cooperar (C)	Desertar (D)
Jogador 1	Cooperar (C)	(x,x)	(z,**y**)
	Desertar (D)	(**y**,z)	(**w,w**)

Não é eficiente de Pareto,, pois C,C daria maiores ganhos para ambos.

b) EN= {(D,D), (C,C)}

		Cooperar (C)	Desertar (D)
Jogador 1	Cooperar (C)	(**x,x**)	(z,y)
	Desertar (D)	(y,z)	(**w**,**w**)

Apenas (C,C) é eficiente de Pareto.

c) EN= {(D,D), (C,C)}

		Cooperar (C)	Desertar (D)
Jogador 1	Cooperar (C)	(**x**,**x**)	(z,y)
	Desertar (D)	(y,z)	(**w**,**w**)

Ambos (D,D) e (C,C) são eficientes de Pareto.

d) EN= {(D,C), (C,D)}

		Cooperar (C)	Desertar (D)
Jogador 1	Cooperar (C)	(x,x)	(**z**,**y**)
	Desertar (D)	(**y**,**z**)	(w,w)

Ambos (D,C) e (C,D) são eficientes de Pareto. Não seria possível aumentar os ganhos de um jogador sem reduzir os ganhos do outro.

<u>2ª questão</u> *

Considere o seguinte jogo:

Jogador 1	Jogador 2	A	B	C	D
	S	3,6	1,2	4,4	2,3
	M	1,0	1,0	2,2	3,1
	T	0,2	2,3	6,4	0,3
	P	-1,2	10,1	2,3	1,2

Encontre todos os equilíbrios de Nash desse jogo.

<u>3ª Questão</u>

Considere o leilão de um determinado objeto onde existem três participantes. A valorização que cada agente faz do bem (em termos monetários) é de conhecimento público e dada por $V_1 = 5$; $V_2 = 3$ e $V_3 = 1$. As regras do leilão são as seguintes: cada agente deve submeter um lance não-negativo, sendo o objeto alocado ao agente que deu o maior lance (em caso de empate, o objeto é dado ao agente que tem a maior valorização pelo bem). Além disso, existem dois sistemas de pagamento. No leilão de primeiro preço, o vencedor paga o valor de seu lance, enquanto que no leilão de segundo preço, o vencedor paga o segundo maior lance. Em ambos os casos, quem não recebe o objeto não têm custo algum.

a) Verifique se as seguintes seqüências de estratégias constituem Equilíbrio de Nash nos casos (i) leilão de primeiro preço e (ii) leilão de segundo preço (onde a i-ésima ordenada se refere ao lance do i-ésimo jogador): (5 , 3 , 1) ; (2 , 2 , 2) ; (0 , 0 , 10)

b) Mostre que em todo EN no leilão de primeiro preço o jogador com maior valorização vence.

Solução:

a)

(i) leilão de primeiro preço

(5 , 3 , 1) não é EN. Dado que o jogador 2 colocou 3 (ou melhor, se o jogador 1 espera que o jogador 2 coloque 3), o jogador 1 pode dar o lance de 4, levar o objeto e aumentar seu payoff. De fato, a melhor resposta do jogador 1 se este espera que o jogador 2 irá oferecer 3 é dar também um lance de 3.

(2 , 2 , 2) não é EN. O jogador 2 poderia dar o lance de 2R$ e 1 centavo , levar o objeto e ficar com um payoff de 0.99. Há, portanto, incentivo para o 2º jogador desviar. Uma curiosidade surge se o espaço em que estivermos trabalhando for discreto e os lances não puderem ser feitos com centavos. Nesse caso, a situação configuraria um EN. O jogador 3 não leva o objeto, e qualquer desvio tal que ele passe a ganhar implicaria em pay-off negativo. Para o jogador 2, colocar 1, 2 ou 3 não faz menor diferença, já que se nos dois primeiros casos ele não leva o objeto, no terceiro ele leva mas fica com payoff zero. Não há incentivo a desviar portanto. Para o jogador um que leva o objeto por causa do critério de desempate, não vale a pena aumentar o lance e diminuir seu payoff

(0 , 0 , 10) não é EN, dado que 1 e 2 colocaram 0, o jogador 3 teria preferido colocar qualquer valor maior que zero e menor que 1.

(ii) leilão de segundo preço

(5 , 3 , 1) é EN. Jogador 1 paga o segundo lance que é de 3, colocar qq valor até 3 não afeta o seu pagamento e menor que 3 implica na perda do objeto. Já os demais jogadores não estão levando o objeto, e em qualquer desvio tal que um deles passe a levar o objeto, o lance precisaria ser maior do que 5, o que levaria a payoffs negativos.

(2 , 2 , 2) não é EN. Jogador 1 ganha o objeto, dado crenças sobre o lance de equilíbrio dos demais, com qualquer lance menor que 5 espera deixar de ganhar e logo não quer se desviar. E por um raciocínio análogo ao caso acima o jogador 3 não tem incentivo a desvio unilateral: não está levando o objeto, e em qualquer desvio passe a levá-lo, incorre em um payoff negativo. Entretanto, o jogador 2 pode dar qualquer lance maior que 2 , de 1 milhão talvez, levar o objeto e pagar menor do que sua valorização.

(0 , 0 , 10) é EN. 3 leva o objeto e paga zero. Já 1 ou 2 para passarem a levar o objeto deveriam dar lance maior ou igual a 10 (e dado a crença de que 3 dá lance de 10 devem esperar pagar esse valor), o que não é lucrativo.

Seja Vj<Vi. Suponha por contradição que bj>bi, ou seja, o jogador com valoração menor dá o lance maior e leva o objeto. Em um primeiro caso vamos supor que bj>Vj, note que não é ótimo essa situação para o jogador j, visto que ele está tendo prejuízo e poderia evitá-lo com um lance bj≤Vj. Portanto, não é EN. Suponha agora que bj≤Vj, o jogador i pode desviar e conseguir lucro positivo jogando bi=Vj+ε< Vi e obter payoff positivo.

4ª questão

Considere uma votação em que três pessoas devem decidir entre três alternativas – A, B e C. Elas votam simultaneamente e não podem se abster. A alternativa com mais votos é a escolhida, mas se nenhuma obtém maioria a alternativa A é a selecionada. Os *payoffs* associados a cada uma delas são:

$$u_1(A)= u_2(B)= u_3(C)= 2,$$
$$u_1(B)= u_2(C)= u_3(A)= 1,$$
$$u_1(C)= u_2(A)= u_3(B)= 0.$$

a) Encontre todos os equilíbrios de Nash em estratégias puras do jogo em questão. (sugestão: utilize 3 matrizes para a representação deste jogo).

Solução:

a) Se o jogo possuísse apenas 2 alternativas e 2 jogadores, sua solução seria trivial: Montaríamos uma matriz 2x2 e resolveríamos o problema da maneira tradicional. Com 3 alternativas e 3 jogadores, a matriz passa a ser tridimensional, da forma 3x3x3. Como é extremamente difícil desenhar o cubo com todos os *payoffs*, podemos escrever, analogamente, 3 matrizes 3x3, a primeira supondo que o jogador 3 joga A, que na segunda joga B e que na terceira joga C.

Jogador 3

A — Jogador 2

J1	A	B	C
A	**2,0,1**	**2,0,1**	**2,0**,1
B	**2**,0,**1**	1,**2,0**	**2**,0,1
C	**2**,0,1	**2**,0,1	0,**1,2**

B — Jogador 2

J1	A	B	C
A	**2**,0,**1**	**1,2**,0	**2**,0,1
B	1,2,0	**1,2,0**	1,**2**,0
C	**2**,0,1	**1,2**,0	0,1,**2**

C — Jogador 2

J1	A	B	C
A	**2**,0,**1**	**2**,0,**1**	**0,1,2**
B	**2**,0,**1**	1,**2,0**	0,1,**2**
C	0,**1,2**	0,**1,2**	**0,1,2**

Os equilíbrios são (A,A,A), (A,B,A), (B,B,B), (C,C,C) e (A,C,C)

5ª questão

Seja uma cidade linear de comprimento 1. Os consumidores estão uniformemente distribuídos ao longo da cidade, e cada consumidor tem uma demanda unitária por determinado bem. Existem N firmas que podem vender esse bem. Assuma que os supermercados estão proibidos (talvez pelos seus fornecedores) de cobrar preços diferentes. Assim, dado um preço p, os consumidores escolhem comprar da loja mais próxima (se houvesse empate, o que tem probabilidade zero, o consumidor simplesmente jogaria uma moeda para escolher entre as duas mais próximas). Assuma também que o custo de operação é zero. O problema das firmas é escolher aonde se localizar.

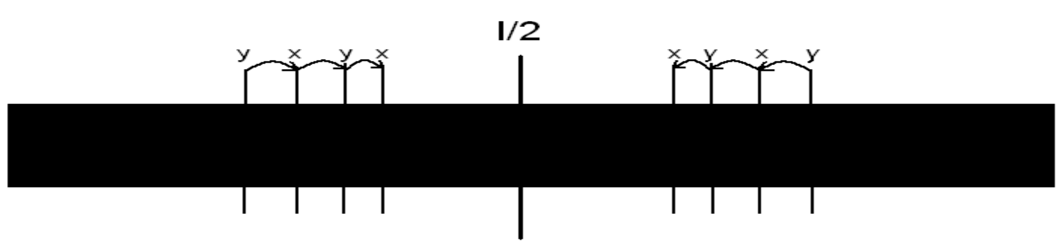
a) Supondo que as firmas escolham suas posições de forma independente e simultânea, encontre o(s) Equilíbrio(s) de Nash em estratégias puras (se existir algum) no jogo acima quando existem **duas** firmas**. Justifique.**

b) Ainda supondo que as firmas escolham suas posições de forma independente e simultânea, encontre o(s) Equilíbrio(s) de Nash em estratégias puras (se existir algum) no jogo acima quando existem **três** firmas**. Justifique.**

Solução:

a) Considerando que os consumidores irão comprar na firma mais próxima cada firma vai querer estar mais próxima que a outra do maior número possível de consumidores. Assim sendo, cada uma vai querer o “pedaço” maior da cidade linear de comprimento l. Ou seja, sendo x a posição da firma 1 e y a posição da firma 2, caso y <l/2 a melhor resposta da firma 1 é escolher x=y+ε. Caso y>l/2 então a melhor estratégia da firma 1 é escolher x=y-ε. Por simetria, a firma 2 tem o interesse de fazer o mesmo. Então as firmas irão convergir para x=y=l/2, onde a firma que desvia a partir desse ponto, dado a posição da outra, irá atender menos consumidores, e logo este será o EN.Neste ponto as duas terão probabilidade igual de vender para cada consumidor.

Graficamente:



b) No caso de três firmas, novamente elas irão buscar se localizar a fim de maximizar o número de vendas. Nessa situação, assim como no caso (a), nenhuma circunstância onde haja uma firma sozinha numa posição pode constituir equilíbrio (se as três estão em posição diferente, com certeza a primeira e a última terão incentivo a se aproximar da do meio, e dado uma sozinha e duas juntas a que está sozinha ganha se aproximando da posição das outras duas). E as três firmas na mesma posição também não pode ser equilíbrio, porque nessa situação cada uma conquista em média 1/3 do mercado, e se uma desviar, dado a posição das outras, conquistará (pelo menos) metade do mercado. Não há EN em estratégias puras.

<u>6ª questão</u>

* Considere n firmas operando em um mercado com demanda inversa P(Q) = 200 – 3Q, onde Q = q1 + q2 + ...+ qn. Os custos marginais são constantes e iguais a 20 e os custos fixos são zero. Cada firma decide a quantidade que produzirá sem conhecer a decisão das outras firmas.

a) No caso de um duopólio, obtenha as quantidades que cada firma produz, a quantidade agregada e o preço de equilíbrio.

b) O que acontece quando o mercado é composto por 5 firmas? Obtenha as quantidades que cada firma produz, a quantidade agregada e o preço de equilíbrio. Compare com o preço do mercado competitivo.

c)Imagine agora que a capacidade máxima de produção de cada firma é de 15 unidades. Esta restrição afeta o lucro das firmas? Justifique sua resposta supondo um mercado composto de 2 firmas e um outro mercado composto de 5 firmas. Comente o resultado.

Solução:

7ª questão

* Suponha uma indústria constituída por duas firma, com estruturas de custo lineares dadas por $C_i(q_i)=4q_i$, $i=1,2$, e que a curva de demanda inversa para o bem produzido homogeneamente pelas duas firmas seja dada por $P(Q)=16-Q$, $Q=q_1+q_2$. Considere que as duas firmas contratam um advogado para escrever um contrato de coalizão, que as obriga a agir como se fossem uma única firma monopolista maximizando os seus lucros, que serão <u>igualmente distribuídos</u>. O contrato prevê uma multa no valor de $\$M$ para a firma que produzir uma quantidade diferente da quantidade de coalizão.

a. (Solução de Coalizão) Determine a quantidade produzida e o lucro de cada firma, caso se comportem como em coalizão, dividindo os lucros.

b. (Solução de Cournot) Determine a quantidade produzida e o lucro de cada firma, caso as duas firmas não cumpram o contrato, agindo individualmente. Lembre-se que neste caso as duas firmas pagarão a multa no valor de $\$M$.

c. Determine a quantidade produzida e o lucro de cada firma, caso uma firma produza a quantidade contratada e a outra não cumpra o contrato estabelecido.

d. Considere, utilizando as informações acima, um jogo simultâneo em que cada firma decide cumprir ou não o contrato. Represente este jogo na forma matricial e encontre o equilíbrio de Nash caso $M=0$.

e. Determine o menor valor da multa $\$M$ capaz de sustentar um equilíbrio de Nash em que as duas firmas cumprem o contrato.

Solução:

8ª questão

Considere o modelo de duopólio de Bertrand com um bem homogêneo, onde duas firmas devem decidir simultaneamente seus preços (estratégias puras). A demanda do mercado pelo bem é dada por q(p) = a – P (a > P). Supondo consumidores racionais e bem informados, a firma que coloca o preço mais baixo captura todo o mercado, enquanto que em caso de preços iguais cada firma captura metade do mercado. Suponha que não existam custos fixos e que cada firma tem custo marginal igual a uma mesma constante c, onde a > c.

a) Mostre que $P_1 = P_2 = c$ constitui um equilíbrio de Nash nesse modelo.

b) Mostre que as estratégias acima são de fato o único equilíbrio de Nash desse jogo. Mais especificamente, mostre que em cada uma das situações abaixo ao menos uma firma terá incentivo unilateral a desviar.

i) min { P_1 , P_2 } < c.
ii) P_i = c ; P_j > c.
iii) P_i > P_j > c.
iv) P_i = P_j > c.

a) O objetivo de ambas as firmas é maximizar os lucros, mas as suas estratégias se baseiam nos preços a serem oferecidos. Assim, temos que se estamos na condição em que P1=P2=c, então, para cada jogador ele pode: 1) aumentar seu preço, mas isso o faria perder todo o mercado para a outra firma, assim, não tem incentivo a desviar; 2) abaixar o seu preço de forma a tomar todo o mercado da outra firma, mas então estaria operando com preço abaixo do seu custo e incorreria em prejuízo, também não sendo razoável. Assim, P1=P2=c constitui um EN para esse modelo.

b)

i) A firma com o menor preço pode melhorar aumentando um pouco o seu preço e com isso poderá reduzir o seu prejuízo. Não pode ser EN.

ii) P1 = c < P2.

A firma 1 pode aumentar um pouco seu preço, passando assim a ter lucro. Não é EN

iii) P1 > P2 > c. A firma 1 não captura um único consumidor. Se baixasse seu preço para P= c+ε, conquistaria o mercado todo e teria lucro positivo. Não é EN.

iv) P1 = P2 > c. Se os preços são tais que ambas as firmas dividem o mercado com lucro positivo, podem diminuir um pouco o preço, com isso quem diminuir fica com todo o mercado e aumenta o lucro. E se ambas as firmas não conseguem demanda aos dados preços, se uma baixasse seu preço para P= c+ε, conquistaria o mercado todo e teria lucro positivo. Não pode ser EN.

9ª questão

(Bertrand com restrição de capacidade). Considere o modelo de duopólio de Bertrand com duas empresas produzindo um bem homogêneo, e estabelecendo seus preços simultaneamente. A demanda do mercado pelo bem é dada por q(p) = 200 – p. Supondo consumidores racionais e bem informados, a firma que coloca o preço mais baixo captura todo o mercado, enquanto que em caso de preços iguais cada firma captura metade do mercado. Suponha que não existam custos fixos e que cada firma tem custo marginal igual a uma mesma constante c=10. Vamos supor ainda que cada empresa enfrenta uma limitação de capacidade produtiva. Verifique se $p_1 = p_2 = 10$ constitui equilíbrio de Nash nesse modelo quando as firmas têm as seguintes restrições de capacidade: (i) 250 unidades; (ii) 100 unidades.

Solução:

Caso (i): A demanda máxima não alcança a restrição de produção de cada firma. As funções de ganho são:

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - c)(200 - p_i) \text{ se } p_i < p_j; \\ \dfrac{(p_i - c)(200 - p_i)}{2} \text{ se } p_i = p_j; \\ 0, \text{ se } p_i > p_j \end{cases}$$

Em termos de equilíbrio de Nash, se uma firma estabelece p>c, a melhor resposta da outra firma é colocar um preço um pouco menor $p' = p - \varepsilon > c$ e capturar todo o mercado, com lucro maior que o obtido quando o mercado era dividido. A melhor resposta da primeira firma diante do p' da concorrente é abaixar seu preço para $p'' = p' - \varepsilon > c$. Esse processo continua até que $p^*_i = p^*_j = c$. Esse é o único EN do jogo, pois o agente que aumentar o preço não vende nada e a escolha de p<c implica prejuízo.

Caso (ii) Vamos supor que a firma i estabeleça $p_i < p_j$. Se o preço estabelecido for acima de R$ 100, a firma captura todo o mercado. Abaixo de p=R$ 100, a demanda do mercado será superior a 100 e a firma estará limitada a sua restrição de capacidade.

Se a firma i colocar um preço menor que R$100, mesmo que a firma j coloque $p_i < p_j$ ela venderá parte de sua produção pois haverá uma demanda residual.

Em termos de equilíbrio, $p^*_i = p^*_j = 10$, não é equilíbrio. Vamos supor que i mantenha seu preço $p_i = 10$, e a firma j aumente seu preço para R$11. A firma j venderá 89 unidades e terá um lucro de R$89, ao invés de zero no caso de pj = 10. O lucro da firma que elevou seu preço é maior do que da que manteve preço=custo marginal. O par de preços (10,10) não é a melhor resposta ao outro e vice-versa. Logo $p^*_i = p^*_j = 10$, não é equilíbrio de Nash.

<u>10ª questão</u>

* (Bertrand com bens diferenciados). Suponha uma indústria constituída por duas firmas, que produzem bens diferenciados. A demanda pelo produto da firma i depende negativamente de seu preço e positivamente do preço da concorrente. Mais especificamente, suponha que seja: $q_i = A - b_i.p_i + d.p_j$ (onde os parâmetros A, bi. e d são positivos). Essas firmas irão interagir uma única vez, escolhendo preços de forma independente e simultânea. Suponha ainda por simplicidade que as firmas não tenham custos de produção.

(a) (1,5) Encontre a correspondência de melhor resposta de cada firma.

(b) (2,0) Qual a principal diferença você identifica entre a correspondência de melhor resposta derivada no item acima e a que foi derivada no modelo de Cournot visto em sala de aula? Discuta.

(c) (2,0) Suponha que um monopolista produza (sem custos) ambos os bens 1 e 2. Considerando um dos bens (digamos, o bem 1), quem teria mais incentivo a aumentar o preço deste, o monopolista ou a firma 1 no duopólio? (dica: compare as CPO).

Solução:

<u>11ª questão</u>

Considere uma situação onde um agente (trabalhador) trabalha para um principal (firma). O agente pode escolher entre gazetear (G) ou se esforçar (E) no trabalho. Caso se esforce, o agente produz um bem cujo valor para o principal é 90. Ao se esforçar, porém, o agente incorre num custo 15. Caso gazeteie, o produto do agente para o principal é zero. O principal, por sua vez, pode decidir fiscalizar (F) ou não fiscalizar (NF) as atividades do agente. A fiscalização custa um montante 10 para o principal e revela o que o agente está fazendo. O principal deve pagar um salário de 20 para o agente, a não ser no caso em que o agente for pego gazeteando, situação na qual o salário pago é zero. O ganho do agente é dado pela diferença entre o salário recebido em cada situação e o custo associado às suas decisões (15 caso se esforce e custo nulo caso gazeteie), enquanto que o ganho do principal é dado pelo valor do produto menos o salário pago menos o custo associado às suas decisões (10 caso decida fiscalizar e zero caso contrário). As decisões do agente e do principal são simultâneas.

Descreva essa situação como um jogo estático e encontre todos os equilíbrios de Nash.

Solução:

	F	NF
G	(0,-10)	(20, -20)
E	(20-15, 90-20-10)	(20-15, 90-20)

Não há equilíbrio de Nash em estratégia pura.

Em estratégia mista
Para o jogador 1 :
Supondo que a probabilidade da firma fiscalizar seja q

Ganho esperado para jogar G $q.0 + 20(1-q)$
Ganho esperado para jogar E $q.(20-15) + (20-15)(1-q)= 5$

Para 1 ficar indiferente entre jogar G e E => $q= 3/4$

Para o jogador 2:
Supondo que a probabilidade do trabalhador gazetear é p

Ganho esperado para jogar F $-10.p + (90-20-10)(1-p)$
Ganho esperado para jogar NF $-20.p + (90-20)(1-p)$
Para 2 ficar indiferente entre jogar F e NF => $p= 1/2$