Lista 1 - Gabarito
Conceitos Básicos de RF

Professora: Daniela Kubudi
Monitor: Guilherme Branco

6 de agosto de 2018

Observação: Quando necessário, considere convenção exponencial para os exercícios em português e composição linear para aqueles em inglês.

Exercício 1 *Sabemos que o preço de um bônus pode ser calculado pelo fluxo de caixa descontado. Considere o preço uma função univariada da YTM. Calcule a aproximação de Taylor de segunda ordem em torno de uma YTM y_0 para os casos discreto e contínuo.*

Solução
i-Caso discreto:

$$p(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{(1+y)^{T_i}}$$

$$\frac{dp(y)}{dy} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i T_i (1+y)^{T_i-1}}{(1+y)^{2T_i}} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i Y_i}{(1+y)^{T_i+1}}$$

$$\frac{d^2p(y)}{dy^2} = (-1)(-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i T_i (T_i+1)(1+y)^{T_i-1}}{(1+y)(1+y)^{2T_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i(T_i+1)Y_i}{(1+y)^{T_i+2}}$$

lembre-se que a expansão de Taylor de segunda ordem é dada pela expressão:

$$p(y) \approx p(y_0) + \frac{dp(y)}{dy}\Big|_{y=y_0}(y-y_0) + \frac{d^2p(y)}{dy^2}\Big|_{y=y_0}\frac{(y-y_0)^2}{2!}$$

logo:

$$p(y) \approx p(y_0) - \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i Y_i}{(1+y_0)^{T_i+1}}(y-y_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i(T_i+1)Y_i}{(1+y_0)^{T_i+2}}\frac{(y-y_0)^2}{2!}$$

pelas definições de Duration Modificada e Convexidade temos:

$$p(y) \approx p(y_0) - D^M(y_0)p(y_0)(y-y_0) + C(y_0)p(y_0)\frac{(y-y_0)^2}{2!}$$

ii - Caso contínuo:

$$p(y) = \sum Y_i e^{-yT_i}$$

$$\frac{dp(y)}{dy} = -\sum T_i Y_i e^{-yT_i}$$

$$\frac{d^2p(y)}{dy^2} = \sum T_i^2 Y_i e^{-yT_i}$$

$$p(y) \approx p(y_0) - \sum T_i Y_i e^{-yT_i}(y - y_0) + \sum T_i^2 Y_i e^{-yT_i} \frac{(y-y_0)^2}{2!}$$

$$p(y) \approx p(y_0) - D(y_0)p(y_0)(y - y_0) + C(y_0)p(y_0)\frac{(y-y_0)^2}{2!}$$

Exercício 2 *Considere um bônus padronizado tal que o valor do cupom é igual a um percentual c do valor de face. Sejam y a YTM do bônus, p o seu preço de mercado e M o seu valor de face. Mostre que:*

1. *Se $y = c$ então $p = M$;*
2. *Se $y > c$ então $p < M$;*
3. *Se $y < c$ então $p > M$.*

Solução

$$p = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{(1+y)^{T_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{cM}{(1+y)^{T_i}} + \frac{M}{(1+y)^{T_n}} = M\left[c\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+y)^{T_i}} + \frac{1}{(1+y)^{T_n}}\right]$$

Sem perda de generalidade assuma que $T_i = i$.

$$p = M\left[c\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+y)^{i}} + \frac{1}{(1+y)^{n}}\right] \underbrace{=}_{\text{Soma p.g.}} M\left[\left[\frac{1-(\frac{1}{1+y})^n}{y}\right]c + \left(\frac{1}{1+y}\right)^n\right]$$

$$\frac{p}{M} - 1 = \underbrace{\left[1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^n\right]}_{\text{constante}}\left[\frac{c}{y} - 1\right]$$

Pela equação acima verificamos que:

- se $y = c$, então $\frac{c}{y} - 1 = 0$, e $\frac{p}{M} - 1 = 0$, e $p = M$.
- se $y > c$, então $\frac{c}{y} - 1 < 0$, e $\frac{p}{M} - 1 > 0$, e $p < M$.
- se $y < c$, então $\frac{c}{y} - 1 > 0$, e $\frac{p}{M} - 1 < 0$, e $p = M$.

Exercício 3 *(Martellini, capítulo 5) Show that the duration of a portifolio P invested in n bonds with weights w_i, denominated in the same currency, is the weighted average of each bond's duration:*

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} w_i D_i$$

Solução
Seja a_i a quantidade de bônus do tipo i existentes no portifólio. Desse modo temos que o preço do portifólio é dado por $p = \sum a_i p_i$. O peso que cada um deles possui dentro do portifólio é dado pela razão entre a quantidade monetária investida no bônus sobre a quantidade monetária total do portifólio.

$$w_j = \frac{a_j p_j}{p}$$

$$p = \sum_{j=1}^{m} a_j p_j$$

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{(1+y)^{T_i}} \frac{T_i}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j Y_i^j}{(1+y)^{T_i}} \frac{T_i}{p} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\frac{a_j}{p}}_{=\frac{w_j}{p_j}} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i^j}{(1+y)^{T_i}} T_i$$

$$D_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{w_j}{p_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i^j}{(1+y)^{T_i}} T_i = \sum_{j=1}^{m} w_j D_j$$

Exercício 4 *(Martellini, capítulo 2) We consider three bonds with the following features:*

Bond	*Maturity (years)*	*Annual coupon*	*Price*
Bond 1	*1*	*10*	*106.56*
Bond 2	*2*	*8*	*106.20*
Bond 3	*3*	*8*	*106.45*

1. *Find the 1-year, 2-year and 3-year zero-coupon rates from the table above.*
2. *We consider another bond with the following features: Bond Maturity Annual coupon Price*

Bond	*Maturity (years)*	*Annual coupon*	*Price*
Bond 4	*3*	*9*	*109.01*

   Use the zero-coupon curve to price this bond.

3. *Find an arbitrage strategy.*

Solução: Excel.

Exercício 5 *(Martellini, capítulo 2) An investor wants to invest \$1,000 cash for a period of 5 days. He has two alternative choices:*

- *either invest in a T-bill with a remaining maturity of 10 days*
- *or roll over his cash using the overnight repo rate.*

1. *Knowing that the T-bill yields 1.70% at the beginning of the investment period and 1.64% at the end (on a discount basis), and that the overnight repo rate has the following values over the investment period:*

- *day 1: 1.80%*
- *day 2: 1.74%*
- *day 3: 1.70%*
- *day 4: 1.65%*
- *day 5: 1.67%*

2. *What is the interest-rate risk inherent in each strategy?*

Solução: Excel.

Exercício 6 *(Martellini, capítulo 2) Assume the following bond yields, compounded semi-annually.*

6-month Treasury Strip: 5.00%;
1-year Treasury Strip: 5.25%;
18-month Treasury Strip: 5.75%.

1. *What is the 6-month forward rate in 6 months?*
2. *What is the 1-year forward rate in 6 months?*
3. *What is the price of a semiannual 10% coupon Treasury bond that matures in exactly 18 months?*

Solução: Excel.

Nos exercícios abaixo verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sua afirmação, preferencialmente de forma analítica.

Exercício 7 *A duration de um bônus que paga cupons, e tem maturação na data T é sempre menor do que a duration de um bônus zero-cupom que matura na mesma data.*

Solução: Verdadeiro.

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{(1+y)_i^T} \frac{T_i}{p}$$

Quando paga cupom:

$$D^1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{cM^1}{(1+y^1)^{T_i}} \frac{T_i}{p^1} + \frac{M^1}{(1+y^1)^{T_n}} \frac{T_n}{p^1}$$

Quando não paga cupom:

$$D^2 = \frac{M^2}{(1+y^2)^{T_n}} \frac{T_n}{p^2} = T_n$$

Portanto temos que:

$$D^1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{cM^1}{(1+y^1)^{T_i}} \frac{1}{p^1}}_{=\mu_i \in (0,1)} T_i + \underbrace{\frac{M^1}{(1+y^1)^{T_n}} \frac{1}{p^1}}_{\lambda \in (0,1)} D^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i + \lambda = 1$$

Sabemos que os pesos devem somar 1, então obtemos o resultado desde que $T_i < T_n, \forall i \neq n$. O que de fato ocorre, já que os períodos são ordenados de forma completa.

Exercício 8 *Quando se investe em bônus, deve-se investir naqueles com maior taxa interna de retorno (YTM), pois são os que possuem o maior retorno esperado.*

Solução: Falso

A taxa interna de retorno é a taxa de retorno quando se mantém um bônus até a sua data de maturação, desde que se considere que o cupom pode ser reinvestido a mesma taxa. No entando, a estratégia de investimento em renda fixa deve levar em consideração outras variáveis além da YTM, como o prazo em que se deseja investir e o risco ao qual se deseja estar exposto.

Contraexemplo: Um indivíduo deseja investir um montante durante 1 ano e possui a sua disposição 2 bônus zero-cupom emitidos pela mesma instituição, com maturidade de 1 ano e 2 anos e YTM de 0.05 e 0.051 respectivamente. O retorno esperado de 1 ano, do primeiro bônus, condicional ao conjunto de informação é dado por:

$$E_1[R^1|I_0] = \frac{face_1^1 - price_0^1}{price_0^1} = 0.05$$

Note que tal retorno é uma variável aleatória degenerada, pois o valor de face que o investidor recebe ao final do tempo de maturação está determinado no período da compra e assim pertence ao conjunto de informação I_0. O retorno esperado de 1 ano, do segundo bônus, condicional a I_0 é dado por:

$$E_1[R^2|I_0] = \frac{E_1[price_1^2|I_0] - price_0^2}{price_0^2}$$

Este retorno é uma variável aleatória com distribuição que depende do preço desse bônus depois de 1 ano, pois tal preço depende da taxa de juros que estará vigorando em $t = 1$ e portanto não pertence ao conjunto I_0. Note que o indivíduo não possui garantia de investir no segundo bônus, pois ele obtém o valor de face somente se aguardar até o ano 2, o que não é seu desejo. Desse modo se escolher essa estratégia ele corre o risco de o preço ser diferente do esperado. O retorno esperado é dado por:

$$E[E_1[R^2|I_0]] = \frac{E[E_1[price_1^2|I_0]] - price_0^2}{price_0^2} \underbrace{=}_{\text{não arbitragem}} 0.05$$

Exercício 9 *Bônus com maiores taxas de cupom possuem maior risco de taxa de juros.*

Solução: Falso

$$p(y,c) = \sum_{i=1}^{n} \frac{cM}{(1+y)^{T_i}} + \frac{M}{(1+y)^{T_n}}$$

$$\frac{\partial \frac{\partial p}{\partial y}}{\partial c} = \frac{\partial^2 p(y,c)}{\partial y \partial c} = -M \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{(1+y)^{T_i+1}} < 0$$

Seja $\frac{\partial p}{\partial y}$ a nossa medida de risco da taxa de juros, quanto da variação na YTM afeta o preço. Desse modo quanto maior for a taxa de cupom, menor é essa variação, pois a derivada é negativa. Assim obtemos o resultado contrário da afirmação.

Exercício 10 *Como perpetuidade é um título que nunca vence sua Duration é infinita.*

Solução: Falso
Como demonstrado na monitoria, apesar de nesse caso a duration ser composta por uma soma de infinitos termos, essa soma é convergente, dada por:

$$D = \frac{cM}{yP}\frac{1+y}{y}$$

onde: c é a taxa do cupom, M é o valor de face, y é a YTM e P é o preço. Note que se esse bônus estiver sendo negociado ao par temos que $c = y$ e $M = P$, assim a duration será simplesmente $\frac{1+y}{y}$.

Exercício 11 *Um gestor de Renda Fixa esperando um movimento de abertura de taxa longa (aumentos nos vértices longos da ETTJ) pode reduzir a Duration de sua carteira para buscar ganhos com essa expectativa.*

Solução: Verdadeiro.

O preço de um bônus varia de maneira inversa ao movimento da taxa, onde a sensibilidade é dada pela duration. No cenário de abertura de taxa longa de juros, os bônus com maior duration perdem mais do que os bônus de menor duration. Assim ao reduzir a duration de sua carteira o gestor *reduz as perdas*, o que pode ser considerado um ganho relativo em termos de melhor razão risco e retorno.