Value at Risk
Handout
VaR Paramétrico

Professora: Daniela Kubudi
Monitor: Guilherme Branco

31 de agosto de 2018

Sumário

1 Introdução

Em primeiro lugar devemos sempre especificar totalmente o VAR. Para isso precisamos definir os seguintes três elementos:

- Janela temporal;
- Moeda;
- Nível de significância;

2 VaR Paramétrico

Um modelo estatístico é dito paramétrico quando as suas variáveis aleatórias podem ser representadas por distribuições conhecidas e que são caracterizadas totalmente por um número finito de parâmetros. Vamos explicar a cosntrução de um VaR por meio de um exemplo. Suponha uma carteira formada por certas quantidades (q) de 5 ativos:

1. q_A ações brasileira - (ativo A);
2. q_B ações americana com preço em dólar - (ativo B);
3. q_C opções de compra (call) do ativo A - (ativo C);
4. q_D LTN's para um prazo T - (ativo D);

O valor da carteira em reais, em uma data base $t = 0$, é dado por:

$$X_0 = q_A.p_0^A + q_B.p_0^B.E_0 + q_C.p_0^C + q_D.p_0^D \tag{1}$$

onde E_0 é a taxa de câmbio R$/USD na data base.

Fazendo a primeira diferença com relação a janela temporal de 1 período (nesse caso 1 período será 1 dia), temos:

$$X_1 - X_0 = q_A.(p_1^A - p_0^A) + q_B.(p_1^B.E_1 - p_0^B.E_0) + q_C.(p_1^C - p_0^C) + q_D.(p_1^D - p_0^D)$$

$$\Delta X = q_A.\Delta p^A + q_B.\Delta(p^B.E) + q_C.\Delta p^C + q_D.\Delta p^D \tag{2}$$

Pela teoria de investimento que aprendemos no curso, tanto em Renda Fixa quanto em Renda Variável, sabemos que as variações dos preços desses ativos podem ser escritas como:

1. Ação brasileira:
   $\Delta p^A = r^A.p_0^A$
   onde r^A é o retorno diário desse ativo.

2. Ação americana com preço em dólar:
   $\Delta(p^B.E) = (\Delta p^B).E_0 + (\Delta E).p_0^B + \Delta p^B \Delta E$
   supondo pequena a variação diária do câmbio e do ativo, podemos aproximar tal expressão assumindo que $\Delta p^B \Delta E_0 = 0$.
   $\Delta(p^B.E) = (\Delta p^B).E_0 + (\Delta E).p_0^B$
   $\Delta(p^B.E) = r^B.p_0^B.E_0 + r^E.E_0.p_0^B = (r^B + r^E).p_0^B.E_0$

3. Opção de compra (call) sobre ativo em moeda nacional:
   Pela fórmula de Black-Scholes podemos decompor a variação do preço de uma opção em "alguns"componentes. Por simplificação, vamos assumir que a variação total do preço da call pode ser obtida somente considerando a sensibilidade ao preço do ativo objeto (Δ) e a sensibilidade à volatilidade do ativo objeto (ν).

   $$\Delta p^C = \frac{\partial p_0^C}{\partial p_0^A}\Delta p^A + \frac{\partial p_0^C}{\partial \sigma_A}\Delta\sigma_A = \frac{\partial p_0^C}{\partial p_0^A}.p_0^A.r^A + \frac{\partial p_0^C}{\partial \sigma_A}\Delta\sigma_A$$

   ou

   $$\Delta p_0^C = \Delta_{call}.p_0^A.r^A + \nu_{call}.\Delta\sigma_A$$

4. LTN para um determinado prazo T:
   $\Delta p^D = \frac{\partial p_0^D}{\partial y}\Delta y$
   $\Delta p^D = -D^M.p_0^D\Delta y = -\frac{D}{1+y}.p_0^D\Delta y$
   onde:

   - y é a taxa de juros que vigora no prazo T, até o vencimento da LTN. Na notação de renda fixa temo, $y = R(0,T)$.

   - D^M é a Duration Modificada e D é a Duration de Macauly.

Substituindo essa informação na equação 2 obtemos:

$$\Delta X = q_A.p_0^A.r^A + q_B.p_0^B.E_0.(r^B + r^E) +$$
$$+ q_C.\Delta_{call}.p_0^A.r^A + q_C.\nu_{call}.\Delta\sigma_A + q_D.(-D^M.p_0^D\Delta y) \quad (3)$$

2.1 Definição

Vamos definir essas variações e taxas de retorno, que são variáveis aleatórias, como sendo os **fatores de risco** da carteira. Isso faz sentido quando pensamos no risco como uma medida de incerteza e associamos incerteza à realização desconhecida de uma variável aleatória.

- $f_1 = r^A$
- $f_2 = r^B$
- $f_3 = r^E$
- $f_4 = \Delta\sigma_A$
- $f_5 = -\Delta y$

$$\Delta X_0 = (q_A.p_0^A + q_C.\Delta_{call}.p_0^A).f_1 + q_B.p_0^B.E_0.(f_2 + f_3) + \\ +q_C.\nu_{call}.f_4 + q_D.D^M.p_0^D.f_5 \tag{4}$$

Defina os coeficientes dos fator de risco f_i como sendo w_i, a **sensibilidade** da carteira ao fator de risco. Assim podemos escrever a variação do preço da carteira como:

$$\Delta X_0 = w_1.f_1 + w_2.f_2 + w_3.f_3 + w_4.f_4 + w_5.f_5 = \sum_{i=1}^{5} w_i.f_i \tag{5}$$

* Note que $w_2 = w_3 = q_B.p_0^B.E_0$.

2.2 Hipóteses

Se o nosso conjunto de informação vai somente até a nossa data base $t = 0$, então todas as variáveis que dependem de elementos que serão conhecidos somente em $t > 0$ são variáveis aleatórias.

É importante lembrar que:

- $\Delta Y_0 = Y_1 - Y_0$;
- $r^Y = \frac{\Delta Y_0}{Y_0} = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0}$;

De modo que todas as variações e taxas de retorno são variáveis aleatórias. Por conta da **parametrização** do modelo vamos assumir que tanto as variações quanto os retornos são **variáveis aleatórias normalmente distribuidas e independentes**. Abaixo a lista de hipóteses:

1. Os fatores de risco são normalmente distribuidos;
2. Os fatores de risco possuem média zero;

Por conta das hipóteses feitas obtemos pela equação 5 que a variação do valor da carteira é uma variável aleatória normalmente distribuida, com média zero. (A combinação linear de v.a.'s normais é uma v.a. normal)

$$\Delta X_0 = \sum_{i=1}^{5} w_i.f_i \sim N(0, \sigma_X) \tag{6}$$

Vamos agora calcular σ_X, que é a volatilidade da carteira, para conseguirmos calcular o VaR.

$$\sigma_X^2 = V(\Delta X_0) = V(\sum_{i=1}^{5} w_i.f_i) = \sum_{i=1}^{5} V(w_i.f_i) + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j\neq i} Cov(w_i.f_i, w_j.f_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} w_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j\neq i} 2.w_i.w_j.\sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{5} w_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j\neq i} w_i.w_j.\rho_{i,j}.\sigma_i.\sigma_j$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{5} w_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j\neq i} w_i.w_j.\rho_{i,j}.\sigma_i.\sigma_j \tag{7}$$

onde:
σ_i é o desvio padrão do fator f_i;
$\rho_{i,j}$ é o coeficiente de correlação entre os fatores f_i e f_j.

A equação acima pode ser escrita na forma matricial, generalizando para N fatores de risco como sendo:

$$\sigma_X^2 = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \dots w_N \end{bmatrix}.\Omega. \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \tag{8}$$

onde:
Ω é a matriz de variância e covariância do vetor de fatores de risco.

2.3 Cálculo do VaR paramétrico

Agora que conhecemos σ_X, podemos caracterizar totalmente o risco existente nessa carteira. De forma que o VaR da carteira com Valor de Mercado X_0, para o prazo de 1 dia, em reais, com confiança de α é dado por[1]

$$VaR(X_0, 1dia, R\$, \alpha) = VaR = \sigma_X.z_\alpha \rightarrow VaR^2 = \sigma_X^2.z_\alpha^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow VaR^2 = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \dots w_N \end{bmatrix}.\Omega.\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}.z_\alpha^2 \tag{9}$$

Podemos interpretar a expressão acima, considerando que é possível calcular um VaR para cada fator de risco diferente. De forma que encontramos uma expressão fechada que relaciona, de forma não linear, o VaR da carteira com o VaR dos fatores de risco.

$$VaR(X_0)^2 = (\sum_{i=1}^{N} w_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} w_i.w_j.\rho_{i,j}.\sigma_i.\sigma_j).z_\alpha^2 =$$

$$VaR(X_0)^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2.VaR(f_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} w_i.w_j.\rho_{i,j}.VaR(f_i).VaR(f_j)$$

Nessa expressão é possível mostrar o efeito diversificação existente na carteira. Ou seja, com o aumento do número de ativos é possível reduzir o risco de uma carteira para obter a mesma rentabilidade esperada.

2.4 Visão geral da seção

Nessa seção, buscamos entender a criação de um VaR paramétrico por meio de um exemplo de uma carteira contendo uma diversidade de 4 tipos de ativos.
O cálculo de um VaR paramétrico pode ser dividido em quatro tarefas mais simples:

1. Identificação dos fatores de risco da carteira;
2. Montar uma matriz com todos os fatores de risco, onde em uma dimensão teremos os fatores e na outra dimensão teremos o tempo;
3. Calcular a matriz de variância e covariância dos fatores de risco;
4. Calcular a sensibilidade da carteira a cada fator de risco.

[1] Atenção para a diferença existente aqui e nos slides2. Lá o VaR é definido como sendo $VaR = X_0.\sigma.z_\alpha$. A questão da diferença é a volatilidade usada. Lá σ é a volatilidade do retorno da carteira, aqui σ_X é a volatilidade da variação no preço da carteira. Em termos práticos basta notar que $\sigma_X = X_0.\sigma$.