# Gabarito da Lista 7

**Exercício 1.** Utilizaremos os resultados gerais encontrado no Exercício 2 da Lista 5.

(a) O equilíbrio de Cournot (simétrico) do mercado é dado por:

$$\begin{aligned} q^N &= \frac{a-c}{(n+1)b} = \frac{1}{3} \\ Q^N &= \frac{n}{n+1}\frac{a-c}{b} = \frac{2}{3} \\ P^N &= \frac{a}{n+1} + \frac{n}{n+1}c = \frac{11}{3} \\ \pi^N &= \left(\frac{11}{3} - 3\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

(b) Caso as firmas cooperassem, resolveriam um problema de maximização conjunta de lucros similar ao problema do monopolista:

$$\max_{Q} \quad [P(Q) - c]\, Q$$

Então teremos o seguinte payoff estático de cartel:

$$\begin{aligned} q^C &= \frac{1}{2}\frac{a-c}{2b} = \frac{1}{4} \\ Q^C &= \frac{a-c}{2b} = \frac{1}{2} \\ P^C &= \frac{a+c}{2} = 4 \\ \pi^C &= (4-3)\,\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(c) Para encontrarmos a condição de estabilidade do cartel, precisamos computar o payoff de desvio. Suponha que a firma 2 esteja jogando $q_2 = q^C = 1/4$. Então o problema de otimização da firma 1 será:

$$\max_{q_1} \quad [P(q_1 + 1/4) - c]\, q_1 = (3/2 - 2q_1)q_1$$

CPO:

$$\begin{aligned} (3/2 - 2q_1) - 2q_1 &= 0 \\ q_1 &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Portanto, teremos o seguinte equilíbrio:

$$
\begin{aligned}
Q^D &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \\
P^D &= \frac{15}{4} \\
\pi^D &= \left(\frac{15}{4} - 3\right)\frac{3}{8} = \frac{9}{32}
\end{aligned}
$$

A condição de estabilidade dinâmica do equilíbrio de cooperação (Cartel) é dada por $\delta \geq \delta^*$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} \delta^{*t}\pi^C &= \pi^D + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{*t}\pi^N \\
\frac{1}{1-\delta^*}\pi^C &= \pi^D + \frac{\delta^*}{1-\delta^*}\pi^N \\
\delta^* &= \frac{\pi^D - \pi^C}{\pi^D - \pi^N}
\end{aligned}
$$

Portanto, para o cartel ser estável é preciso termos $\delta \in [\delta^*, 1]$, onde $\delta^* = 9/17 \cong 0.53$.

**Exercício 2.**

(a) Do modelo de Cournot com custos assimétricos, temos os valores de equilíbrio:

$$
\begin{aligned}
& q_i = \frac{10+6}{4} - c_i \quad \Rightarrow (q_1, q_2, q_3) = (3, 2, 1) \\
& Q = 6, \quad P = 4
\end{aligned}
$$

O lucro conjunto da indústria é dado por:[1]

$$
\begin{aligned}
\Pi &= \sum_i \pi_i \\
&= (4-1)3 + (4-2)2 + (4-3)1 = 14
\end{aligned}
$$

O excedente do consumidor é dado pela área do triângulo:

$$
EC = \frac{1}{2}(10-4)6 = 18
$$

(b) Suponha que as firmas 2 e 3 se fundam, resultando em uma nova firma com $c_i = 2$. O novo equilíbrio será:

$$
\begin{aligned}
& q_i = \frac{10+3}{3} - c_i \quad \Rightarrow (q_1, q_2) = (\frac{10}{3}, \frac{7}{3}) \\
& Q = \frac{17}{3}, \quad P = \frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

[1]Na ausência de custos fixos, o lucro da indústria corresponde ao excedente do produtor.

Os novos valores de excedente do produtor e consumidor são, respectivamente:

$$\pi_1 + \pi_2 = \left(\frac{13}{3} - 1\right)\frac{10}{3} + \left(\frac{13}{3} - 2\right)\frac{7}{3} = \frac{149}{9} \cong 16.56$$
$$EC = \frac{1}{2}\left(10 - \frac{13}{3}\right)\frac{17}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{3}\right)^2 = 16.05$$

Portanto, $\Delta ET \cong 0.61$, i.e., a fusão tem efeito positivo sobre o bem-estar, devido a ganhos de eficiência.

(c) Ver exercício 5(c) da Lista 5.

(d) Ver Lista 5, exrcícios 2,4,5 e 6.

**Exercício 3.**

(a) Vimos em aula que, no modelo de cartel com punição de desvios via reversão ao equilíbrio de Nash-Cournot, a taxa de desconto $\delta^*$ que torna o cartel sustentável independe dos parâmetros do problema (intercepto e inclinação da demanda linear; custo marginal), mas somente do número de firmas no mercado $n$. Para o caso de duas firmas, temos que:

$$\delta^* = \frac{\pi^D - \pi^C}{\pi^D - \pi^N} = \frac{9}{17} \cong 0.53$$

(b) Agora temos a extensão do modelo de conluio em jogos repetidos para o ambiente com política antitruste. As variáveis "probabilidade de investigação e condenação" e "valor da punição" são formas reduzidas do investimento da agência em monitoramento e da qualidade das instituições de prosecução e punição vigentes, e são influenciadas pelas escolhas do design da política de defesa da concorrência. Defina $V_C$ como o valor presente esperado de participar do cartel. Para encontrar sua expressão, precisamos computar três possibilides em um dado período (digamos $t = 0$):

(1) Com probabilidade $(1 - a)$, não há investigação no período zero e o cartel continua nos períodos subsequentes. O lucro presente esperado é:

$$V_1 = (1 - a)(\pi^C + \delta V_C)$$

(2) Com probabilidade $a(1 - s)$, ocorre investigação infrutífera no período zero, e o cartel continua:

$$V_2 = a(1 - s)(\pi^C + \delta V_C)$$

(2) Investigação e condenação, com probabilidade $as$: cada membro do cartel é multado e o cartel colapsa a partir do período seguinte:

$$V_3 = as\left(\pi^C - F + \frac{\delta}{1-\delta}\pi^N\right)$$

Assim, o payoff de participar do cartel é o valor esperado do payoff desses três estados da natureza:

$$\begin{aligned}
V_C &= V_1 + V_2 + V_3 \\
&= (1-a)\pi^C + a(1-s)\pi^C + as\pi^C - asF + \frac{as\delta}{1-\delta}\pi^N + (1-a)\delta V_C + a(1-s)\delta V_C \\
&= \pi^C - asF + \frac{as\delta}{1-\delta}\pi^N + (1-as)\delta V_C
\end{aligned}$$

Resolvendo para $V_C$, temos:

$$V_C = \frac{\pi^C - asF + \frac{as\delta}{1-\delta}\pi^N}{1-\delta(1-as)}$$

**Exercício 4.** Do modelo de Cournot com custos assimétricos (vide Lista 5, Exercício 2), sabemos que o equilíbrio é caracterizado por:[2]

$$\begin{aligned}
q_i &= \frac{a+C}{b(n+1)} - \frac{c_i}{b} \\
Q &= \frac{n}{b(n+1)}\frac{a-C/n}{b} \\
P &= \frac{a+C}{n+1} \\
\pi_i &= \left(\frac{a+C}{n+1} - c_i\right)^2
\end{aligned}$$

Aplicando aos parâmetros do problema, teremos que:

$$\begin{aligned}
q_i &= 16 + \frac{\gamma}{5}, \quad i = 1,2,3; \quad q_4 = 16 - 45\gamma \\
Q &= 64 - \frac{\gamma}{5} \\
P &= 36 + \frac{\gamma}{5} \\
\pi_i &= \left(16 + \frac{\gamma}{5}\right)^2, \quad i = 1,2,3; \quad \pi_4 = \left(16 - \frac{4}{5}\gamma\right)^2
\end{aligned}$$

(a) Para que o equilíbrio seja verdadeiro, temos que garantir a condição $P \geq c_i$ para todas as firmas. Para firmas 1,2 e 3, é preciso que:

$$\begin{aligned}
36 + \frac{\gamma}{5} &\geq 20 + \gamma \\
\gamma &\geq -80
\end{aligned}$$

[2] Defina $C = \sum_i c_i$

Já para a firma 4:

$$\begin{aligned}36 + \frac{\gamma}{5} &\geq 20\\ 20 &\geq \gamma\end{aligned}$$

Note que ambas as condições são satisfeitas para $\gamma$ no intervalo $[-20, 20]$.

(b) O lucro conjunto das firmas 1 e 2 antes da fusão é dado por:

$$\begin{aligned}\pi_1 + \pi_2 &= 2\left(16 + \frac{\gamma}{5}\right)^2\\ &= 512 + \frac{64}{5}\gamma + \frac{2}{25}\gamma^2\end{aligned}$$

Após a fusão, temos um novo equilíbrio de Cournot com $n = 3$ firmas no mercado:

$$\begin{aligned}q_i' &= 20 + \frac{\gamma}{4}, \quad i = 1, 2; \quad q_3' = 20 - \frac{3}{4}\gamma\\ Q' &= 70 - \frac{3}{4}\gamma\\ P' &= 30 + \frac{\gamma}{4}\\ \pi_i' &= \left(20 + \frac{\gamma}{4}\right)^2, \quad i = 1, 2; \quad \pi_3' = \left(20 - \frac{3}{4}\gamma\right)^2\end{aligned}$$

Assim, a fusão só é lucrativa se:

$$\begin{aligned}\pi_1 + \pi_2 &\leq \pi_1'\\ 512 + \frac{64}{5}\gamma + \frac{2}{25}\gamma^2 &\leq 400 + \frac{5}{2}\gamma + \frac{\gamma^2}{16}\\ \gamma &\leq -27 \text{ ou } \gamma \geq 89\end{aligned}$$

Mas temos que $|\gamma| \leq 20$, logo a fusão não é lucrativa para as firmas fusionadas.

(c) Supondo agora fusão entre as firmas 1 e 4, temos que o lucro pré-fusão é dado por:

$$\begin{aligned}\pi_1 + \pi_4 &= \left(16 + \frac{\gamma}{5}\right)^2 + \left(16 - \frac{4}{5}\gamma\right)^2\\ &= 512 - \frac{96}{5}\gamma + \frac{17}{25}\gamma^2\end{aligned}$$

O lucro pós-fusão depende de qual firma resulta. Dividiremos a análise em dois casos:

**Caso 1)** Suponha $\gamma > 0$, logo a firma resultante tem $c_i = 20$. O novo equilíbrio de

Cournot (simétrico) é dado por:

$$
\begin{aligned}
q' &= \frac{a-c}{n+1} = 20 \\
Q' &= 60 \\
P' &= 40 \\
\pi' &= 400
\end{aligned}
$$

Então, a fusão será lucrativa quando:

$$
\begin{aligned}
512 - \frac{96}{5}\gamma + \frac{17}{25}\gamma^2 &\leq 400 \\
8.23 \leq \gamma &\leq 19.99
\end{aligned}
$$

**Caso 2)** Suponha $\gamma < 0$, logo a firma resultante tem $c_i = 20 + \gamma < 20$. O novo equilíbrio de Cournot será tal que:

$$
\begin{aligned}
q_i' &= 20 + \frac{\gamma}{4}, \quad i = 1, 2; \quad q_3' = 20 - \frac{3}{4}\gamma \\
Q' &= 70 - \frac{3}{4}\gamma \\
P' &= 30 + \frac{\gamma}{4} \\
\pi_i' &= \left(20 + \frac{\gamma}{4}\right)^2, \quad i = 1, 2; \quad \pi_3' = \left(20 - \frac{3}{4}\gamma\right)^2
\end{aligned}
$$

Então, a fusão será lucrativa quando:

$$
\begin{aligned}
512 - \frac{96}{5}\gamma + \frac{17}{25}\gamma^2 &\leq \left(20 - \frac{3}{4}\gamma\right)^2 \\
6.61 \leq \gamma &\leq 144
\end{aligned}
$$

Porém $\gamma < 0$, logo a fusão nunca é lucrativa nesse caso.

O impacto da fusão no lucro das demais firmas (analisando somente o caso 1) é dado por:

$$
\begin{aligned}
\pi_2' - \pi_2 &= 400 - \left(16 + \frac{\gamma}{5}\right)^2 \\
&= 400 - 256 - \frac{32}{5}\gamma - \gamma^2/25 \\
&> 0 \text{ se } 20 < \gamma < 180
\end{aligned}
$$

Mas $|\gamma| \leq 20$, logo o lucro das demais firmas diminui com a fusão entre 1 e 4.