## Gabarito da Lista 3

**Exercício 1.**

(a) O problema do regulador é maximizar o bem-estar social:

$$\begin{aligned}
W &= V + U \\
&= S(q) - qP(q) - (1+\lambda)t^\star + t - \sigma(e) \\
&= S(q) - qP(q) - (1+\lambda)\left[t - qP(q) + (\theta - e)q + K\right] + t - \sigma(e) + \left[(1+\lambda)\sigma(e) - (1+\lambda)\sigma(e)\right] \\
&= S(q) + \lambda qP(q) - (1+\lambda)\left[(\theta - e)q + K + \sigma(e)\right] - (1+\lambda)t + t - \sigma(e) + (1+\lambda)\sigma(e) \\
&= S(q) + \lambda qP(q) - (1+\lambda)\left[(\theta - e)q + K + \sigma(e)\right] - \lambda U
\end{aligned}$$

(b) O problema de seleção adversa é representado pelo parâmetro $\theta$, pois o regulador ao oferecer o contrato não sabe o tipo da firma. O problema de moral hazard é representado pelo parâmetro $e$, pois após o contrato estar assinado, o regulador não observa o esforço de redução de custos exercido pelo firma.

(c)

$$\begin{aligned}
\underset{q_l,e_l,U_l,q_h,e_h,U_h}{\text{Max}} \quad & \nu\left\{S(q_l) + \lambda q_l P(q_l) - (1+\lambda)\left[(\theta_l - e_l)q_l + K + \sigma(e_l)\right] - \lambda U_l\right\} \\
& +(1-\nu)\left\{S(q_h) + \lambda q_h P(q_h) - (1+\lambda)\left[(\theta_h - e_h)q_h + K + \sigma(e_h)\right] - \lambda U_h\right\} \\
\text{s.a.} \quad & U_l = \Phi(e_h) \\
& U_h = 0
\end{aligned}$$

Obs.: Calculando $\Phi(e_h)$:

$$\begin{aligned}
& U_l = t_l - \sigma(\theta_l - c_l) \geq t_h - \sigma(\theta_l - c_h) + \sigma(\theta_h - c_h) - \sigma(\theta_h - c_h) \\
& U_l \geq U_h - \sigma(\theta_l - c_h) + \sigma(\theta_h - c_h) \\
& U_l \geq U_h - \sigma(\theta_h - \theta_h + \theta_l - c_h) + \sigma(e_h) \\
& U_l \geq U_h + \left[\sigma(e_h) - \sigma(eh - \Delta\theta)\right], \text{ onde } \Delta\theta \equiv \theta_h - \theta_l \\
& U_l \geq U_h + \Phi(e_h) \\
& \quad \text{onde } \Phi(e_h) \equiv \sigma(e_h) - \sigma(eh - \Delta\theta)
\end{aligned}$$

Substituindo as restrições na função objetivo:

$$\begin{aligned}
\underset{q_l,e_l,q_h,e_h}{\text{Max}} \quad & \nu\left\{S(q_l) + \lambda q_l P(q_l) - (1+\lambda)\left[(\theta_l - e_l)q_l + K + \sigma(e_l)\right] - \lambda \Phi(e_h)\right\} \\
& +(1-\nu)\left\{S(q_h) + \lambda q_h P(q_h) - (1+\lambda)\left[(\theta_h - e_h)q_h + K + \sigma(e_h)\right]\right\}
\end{aligned}$$

CPO:

$$\frac{P(q_l)-(\theta_l-e_l)}{P(q_l)} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{\eta}$$
$$\sigma'(e_l) = q_l$$
$$\frac{P(q_h)-(\theta_h-e_h)}{P(q_h)} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{\eta}$$
$$\sigma'(e_h) = q_h - \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\nu}{1-\nu}\Phi'(e_h)$$

(d) Calculando o First Best:

Se o regulador conhece $\theta$ e pode observar $e$ ele se restringe apenas pela restrição de participação. Maximizando o bem-estar, nós obtemos:

$U = 0$, i.e. nenhuma renda é dada para a firma;

$\sigma'(e) = q$, i.e. o custo marginal do esforço iguala sua utilidade marginal;

$\frac{d}{dq}\left[S(q) + \lambda q P(q)\right] = (1+\lambda)(\theta - e)$,

i.e. a benefício marginal social da produção iguala seu custo marginal social.

Esta última condição pode ser reescrita como $\frac{P(q)-(\theta-e)}{P(q)} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{\eta}$, i.e. a fórmula da precificação de Ramsey.

Sob informação assimétrica a precificação de Ramsey é mantida inalterada para os dois tipos. Por outro lado, o nível de esforço e a quantidade produzida do tipo menos eficiente são distorcidos para baixo. Além disso, a firma ineficiente permanece sem receber renda, enquanto a firma eficiente passa a obter uma utilidade positiva. A possibilidade da firma eficiente de se passar por ineficiente e assim obter um contrato mas favorável obriga o regulador a oferecer a esta um contrato que inclui um maior nível de esforço e produção do que o oferecido à firma ineficiente, ams que transfere uma renda positiva (renda informacional), contrato este que não será aceito pela firma ineficiente.

**Exercício 2.**

(a) O objetivo deste exercício é reinterpretar o contrato ótimo acima como uma regra de reembolso de custos. Portanto, supondo que a firma é reembolsada em uma proporção fixa $\alpha$ dos custos, sua utilidade passa a ser $U = \alpha C - C - \Psi(e)$, onde $C = (\theta - e)q$ e portanto a transferência passa a ser endógena no problema da firma. Agora maximizar utilidade é a mesma coisa que minimizar custos, logo a firma resolve:

$$\underset{e}{\text{Max}} \quad (1-\alpha)(\theta-e)q+\Psi(e)$$

Cuja condição de primeira ordem é $\Psi'(e)=(1-\alpha)q$. O contrato estabelece $(\alpha_L,\alpha_H)$ de modo que para as firmas seja ótimo selecionar o contrato do seu tipo e realizar o esforço ótimo de second-best. Logo, os valores de $\alpha_L$ e $\alpha_H$ devem satisfazer a CPO da firma e as condições do problema canônico.

(b),(c) A CPO que determina o nível de esforço ótimo da firma eficiente, $\Psi'(e_L)=q_L$, pode então ser interpretada como $\alpha_L=0$, i.e. um contrato sem reembolso de custos. O contrato escolhido pela firma eficiente será então um de reembolso fixo (zero), o que induz a firma a exercer o nível de esforço de redução de custos ótimo.

A CPO que determina o nível de esforço ótimo da firma ineficiente, $\Psi'(e_H)=q_H-\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\nu}{1-\nu}\Phi'(e_H)$, pode ser interpretada como $\alpha_H=\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\Phi'(e_H)}{q_H}$, i.e. uma parte dos custos é reembolsada, o que induz a firma a exercer um nível de esforço abaixo do ótimo. Quanto maior $\alpha_H$, menores os incentivos para que a firma exerça esforço de redução de custos.

**Exercício 3.** O objetivo deste exercício é verificar como o contrato ótimo é alterado quando se restringe os instrumentos disponíveis ao regulador. No problema anterior, o contrato ótimo era $\{(q_L,t_L),(q_H,t_H)\}$, em que as transferências eram baseadas na observação dos custos $(C_L,C_H)$. Este contrato podia ser alternativamente representado por uma simples regra de reembolso de custos $(\alpha_L,\alpha_H)$, que também depende da observação de custos. No presente caso, os custos não são observáveis, e portanto o contrato deve se basear apenas na quantidade produzida. Naturalmente, esperamos que o *outcome* contratual seja pior em termos de bem-estar que o caso em que os custos são observáveis.

(a) Como os custos não podem mais ser mais auditados, eles não podem fazer parte da transferência líquida que o governo repassa à firma – $t=\tilde{t}+p(q)q$, embora ainda incidem negativamente sobre a utilidade da firma, que passa a ser $U=t-(\theta-e)q-\Psi(e)$.

(b) O esforço, que antes era influenciado pelo regulador através de um esquema de reembolso de custos, passa a ser determinado residualmente pela maximização da utilidade da firma (condicional ao nível de produção determinado no contrato): $\Psi'(e_L)=q_L$ e $\Psi'(e_H)=q_H$.

(c) Denotanto por $e^*(q)$ a solução de $\Psi'(e)=q$, a restrição de incentivos da firma eficiente se torna:

$$\begin{aligned} U_L=t_L-(\theta_L-e^*(q_L))\,q_L-\Psi(e^*(q_L)) &\geq t_H-(\theta_L-e^*(q_H))\,q_H-\Psi(e^*(q_H)) \\ &= U_H+(\theta_H-\theta_L)q_H \end{aligned}$$

Novamente, as restrições ativas são a de participação da firma ineficiente ($U_H = 0$) e de compatibilidade em incentivos da firma eficiente ($U_L = U_H + \Delta\theta q_H$). Substituindo na função objetivo do regulador, obtemos as condições de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{p_L - (\theta_L - e^*(q_L))}{p_L} &= \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{\eta} \\ \frac{p_H - (\theta_H - e^*(q_H))}{p_H} &= \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{\eta} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\Delta\theta}{p_H} \end{aligned}$$

(d) Ao contrário do caso com custos observáveis, o custo marginal agora é condicionalmente ótimo, mas ocorre distorção na precificação da firma ineficiente. Com a perda de um instrumento de regulação (o reembolso de custos), para reduzir a renda informacional $\Delta\theta q_H$, o regulador tem agora que reduzir $q_H$ (e consequentemente aumentar $p_H$). Essa é a origem da distorção na precificação representada por $\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\Delta\theta}{p_H}$.

**Exercício 4.** O objetivo deste exercício é verificar como o contrato ótimo é alterado quando se restringe os instrumentos disponíveis ao regulador: desta vez a restrição é sobre a possibilidade de realizar transferências. Logo um contrato agora é um par $\{(q_L, C_L), (q_H, C_H)\}$.

(a) Se o governo não pode efetuar transferências para as firmas reguladas, a receita destas fica restrita a suas vendas, e a utilidade se torna $U = p(q)q - (\theta - e)q - \Psi(e)$. A restrição de incentivos da firma eficiente se torna, portanto:

$$\begin{aligned} U_L = p(q_L)q_L - C_L q_L - \Psi(\theta_L - C_L) &\geq p(q_H)q_H - C_H q_H - \Psi(\theta_L - C_H) \\ \Leftrightarrow \quad U_L &\geq U_H + \Phi(e_H) \end{aligned}$$

Ou seja, a restrição é a mesma do caso com transferências. O bem-estar social pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} W &= \{S(q) - p(q)q\} + \{p(q)q - (\theta - e)q - \Psi(e)\} \\ &= S(q) - (\theta - e)q - \Psi(e) \end{aligned}$$

O problema do regulador pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \underset{(q_L, e_L) q_H, e_H)}{\text{Max}} \quad & \nu\left[S(q_L) - (\theta_L - e)L)q_L - \Psi(e_L)\right] + (1-\nu) \quad \left[S(q_H) - (\theta_H - e_H)q_H - \Psi(e_H)\right] \\ \text{s.a.} \quad & p(q_L)q_L - (\theta_L - e_L)q_L - \Psi(e_L) = \Phi(e_H) \qquad [\nu\mu_1] \\ & p(q_H)q_H - (\theta_H - e_H)q_H - \Psi(e_H) = 0 \qquad [(1-\nu)\mu_2] \end{aligned}$$

em que $\nu\mu_1$ e $(1-\nu)\mu_2$ são os respectivos multiplicadores de Lagrange das restrições.

As condições de primeira ordem deste problema são:

$$\Psi'(e_L) = q_L$$
$$\Psi'(e_H) = q_H - \frac{\mu_1}{1+\mu_2}\frac{\nu}{1-\nu}\Phi'(e_H)$$
$$\frac{p_L - (\theta_L - e_L))}{p_L} = \frac{\mu_1}{1+\mu_1}\frac{1}{\eta}$$
$$\frac{p_H - (\theta_H - e_H))}{p_H} = \frac{\mu_2}{1+\mu_2}\frac{1}{\eta}$$

(b) Observe das CPO do item (a) que ocorre distorção no nível de esforço da firma ineficiente com o objetivo de reduzir a renda informacional da firma eficiente. A precificação de Ramsey de adapta para garantir o balanço orçamentário da firma ineficiente e para prover a renda informacional apropriada à firma eficiente. Os multiplicadores se ajustam com esse propósito.

(c),(d) O preço permitido pelo regulador agora é uma função do custo marginal, i.e., $p = p(\theta - e)$. A firma resolve então o problema:

$$\underset{e}{\text{Max}} \quad [p(\theta - e) - (\theta - e)]\, q\,(p(\theta - e)) - \Psi(e)$$

cuja solução é caracterizada pela CPO:

$$\Psi'(e) = q(p(\theta - e)) - p'(\theta - e)\left[q + (p - (\theta - e))\frac{dq}{dp}\right]$$

Assim, a CPO que determina o nível de esforço da firma eficiente:

$$\Psi'(e_L) = q_L$$

pode ser interpretada como

$$p'(\theta_L - e_L) = 0$$

ou seja, uma regra de preço independente do custo marginal.

Por outro lado, a CPO do esforço da firma ineficiente:

$$\Psi'(e_H) = q_H - \frac{\mu_1}{1+\mu_2}\frac{\nu}{1-\nu}\Phi'(e_H)$$

] pode ser interpretada como

$$p'(\theta_L - e_L) = \mu_1\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\Phi'(e_H)}{q\,(p(\theta_H - e_h))}$$

ou seja, uma regra de preço crescente com o custo marginal.

Em suma, a regulação ótima sem transferências mas com auditoria de custos é equivalente a impor um preço como função do custo marginal observado para cobrir os custos da firma ineficiente e deixar uma renda informacional para a firma eficiente.

**Exercício 5.** O exercício supõe que o projeto é benéfico para a sociedade mesmo quando a firma tem custo alto. Logo, o governo tem que garantir que ambas vão participar, o que significa deixar utilidade não negativa para ambas. Note que se trata um projeto de tamanho fixo (contrato tipo *procurement*) de valor social $S$, daí o tradeoff entre os extremos *fixed-price* e *cost-plus*. Analogamente, se o projeto fosse de tamanho variável (contrato tipo regulação, com função demanda $P(q)$ e valor social $S(q)$), o tradeoff entre tipos extremos de contrato seria entre *price-cap* e *cost-of-service*.

Outra observação: neste problema o esforço assume valores discretos ($e \in \{0, 1\}$) e não há função desutilidade do esforço explícita, logo assumimos que a firma tem simples preferência por esforço baixo a alto. Se houver incentivos, ela escolhe $e = 1$, se não houver, ela escolhe $e = 0$.

**Fixed-price:** o governo escolhe um preço fixo que deixe a firma ineficiente com lucro econômico zero (o que garante sua participação). Como neste arranjo a firma é proprietária as economias de custo decorrentes do esforço, o incentivo ao esforço é total: ambas escolhem $e = 1$. Logo, o custo da firma ineficiente é $C(\theta_H, e_H) = 70 - 15 = 55$, que é o pagamento mínimo (preço) ao qual ela aceita o projeto e, portanto, é o preço que o governo deve estabelecer. A firma eficiente, que aceitaria trabalhar por $C(\theta_L, e_L) = 50 - 15 = 35$, recebe o pagamento único de 55 e fica com lucro igual a 20.

**Cost-plus:** esse contrato é feito de forma a não deixar renda informacional (*rent*) para a empresa. Logo, o esforço é zero para ambas as firmas – não há qualquer incentivo à redução de custos. O governo observa o custo total da firma (apesar de não saber a decomposição entre esforço e eficiência) e transfere exatamente esse custo para cada uma delas. Logo, a firma eficiente recebe 70, enquanto a firma ineficiente recebe 50, nenhuma se esforça e ambas ficam com utilidade zero.