Lista de Exercícios 2

Exercício 1.

(a) $Cmg = 25$, independentemente da quantidade produzida. Então:

$$q = 200 - 2p \quad \Rightarrow \quad q = 200 - 2(25) \quad \Rightarrow \quad q = 150$$

O lucro Π será dado pela receita menos os custos:

$$\Pi = pq - (400 + 25q) = -400$$

Usando a demanda inversa $p = 100 - q/2$, temos que o excedente do consumidor é dado por:

$$EC = ((100 - 25) \times 150)\frac{1}{2} = 5625$$

Contudo, note que o monopolista está tendo prejuízo. Se o regulador impuser o preço igual ao custo marginal, o monopolista sairia do mercado.

(b) Com preço igual ao custo médio, temos que:

$$\frac{400}{q} + 25 = 100 - \frac{q}{2} q^2 - 150q + 800 = 0$$

As soluções desta equação quadrática são $q_1 = 144,46$ e $q_2 = 5,54$. Em qualquer caso, sempre que $p = CMe$ temos lucro zero. Associados a essas respectivas quantidades, a demanda inversa nos dá os seguintes preços:

$$p_1 = 100 - \frac{144,46}{2} = 27,77$$
$$p_2 = 100 - \frac{5,54}{2} = 97,23$$

Vemos que p_1 está mais perto da situação $P = Cmg$ (ótimo de Pareto) do que p_2, logo a primeira solução é aquela escolhida pelo regulador. Também podemos argumentar que o excedente do consumidor é crescente na quantidade, e a primeira solução tem quantidade produzida maior. Podemos ainda calcular os excedentes explicitamente:

$$EC_1 = ((100 - 27,77) \times 144,46)\frac{1}{2} = 5217,33$$
$$EC_2 = ((100 - 97,23) \times 5,54)\frac{1}{2} = 7,67$$

(c) Com preço igual a custo marginal, o excedente do consumidor (antes da taxa de acesso) seria de 562,5 por cada um dos 10 consumidores. Sabendo disso, o monopolista pode cobrar taxa de acesso neste exato montante, que é o maior preço que os consumidores estariam dispostos a pagar quando o preço é $p = 25$. Cada consumidor iria comprar $\frac{150}{10} = 15$ unidades do produto. Com taxa de participação, o excedente do consumidor é zero.

O lucro do monopolista, por sua vez, é dado por:

$$\Pi = 150 \times 25 - (400 + 25 \times 150) + 10 \times 562,5 = 5225$$

O excedente total é maximizado se o monopolista puder escolher livremente a taxa de participação, mas os consumidores não têm nenhum excedente.

Exercício 2.

(a) Primeiramente, temos que encontrar a curva de demanda. Sabemos que o preço pago por um consumidor em um determinado ponto (preço de reserva) é a sua utilidade marginal. Logo, a "utilidade total" (ou seja, o bem estar) é simplesmente a integral do preço, ponto a ponto (na abcissa das quantidades). Assim, o preço (i.e., a demanda inversa) é simplesmente a derivada da função de bem estar:

$$p(q) = S'(q)$$

em que o lado esquerdo é a demanda inversa. Logo, no nosso exercício a demanda inversa é dada por:

$$p(q) = 200 - 2q$$

O problema de maximização de lucro do monopolista é:

$$\underset{q}{\text{Max}} \quad (200 - 2q)q - (100 + 2q)$$

Maximizando e resolvendo em relação a q, encontramos $q = 49,5$ e $p = 101$.

(b) Eficiência de Pareto significa preço igual a custo marginal:

$$200 - 2q = 2 \quad \Rightarrow \quad q = 99$$

Nessa situação o lucro do monopolista é:

$$\Pi(q = 99, p = 2) = 2 - 100 + 2 \times 99) - 100$$

Ou seja, nessa situação o monopolista terá prejuízo igual ao custo fixo: 100.

(c) Considere que o custo marginal dos fundos públicos é $\lambda = 1$. Nesse caso, o problema do regulador é maximizar o bem-estar social (não é preciso restrição, pois o que faz a firma participar do mercado é a transferência do regulador). Veja:

$$\underset{q}{\text{Max}} \quad (200q - q^2) - (1+\lambda)(100 + 2q)$$

Resolvendo, encontramos:

$$\begin{aligned}(200 - 2q) - (1+\lambda)2 &= 0\\ 200 - 2 \times 2 &= 2q\\ q &= 98\end{aligned}$$

(d) Genericamente, a regra de Ramsey resulta da maximização do bem-estar sujeita à restrição de lucro não negativo. Como o monopolista não vende o bem diretamente para os consumidores, (apenas para o governo, que o distribui gratuitamente), o problema é:

$$\begin{aligned}\underset{q}{\text{Max}} \quad & (200q - q^2) - (100 + 2q)\\ \text{s.a.} \quad & (200 - 2q)q \geq 100 + 2q\end{aligned}$$

Nesse caso o monopolista é monoprodutor e, portanto, basta fazer preço igual a custo médio (a única possibilidade de lucro zero):

$$200 - 2q = \frac{100}{q} + 2$$

Resolvendo (e considerando a raiz relevante) chegamos a q=98,5.

(e) Para encontrar o peso morto quando é produziro q^*, basta resolver:

$$\Delta BES = \int_{q^*}^{q_0} [p(q) - Cmg(q)]\, dq$$

em que o custo marginal é constante e igual a 2.
Substituindo a demanda inversa e os vários valores encontrados nos itens (a), (c) e (d) acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta BES_{(a)} &= 2450,25\\ \Delta BES_{(c)} &= 1\\ \Delta BES_{(d)} &= 0,25\end{aligned}$$

Logo o apreçamento de Ramsey minimiza o peso morto. Poderíamos ter argumentado também que o preço de Ramsey é o que mais se aproxima do *benchmark* eficiente, ou seja, $p = Cmg$. Como em todos os casos o excedente do monopolista é zero, e o excedente do consumidor é crescente na quantidade, a alocação com menor preço (dada a demanda negativamente inclinada) é o mais eficiente.

Exercício 3. O apreçamento de Ramsey é um apreçamento linear, aplicável a um monopólio natural multiproduto que incorre em perdas em relação ao referencial LMCP (P=Cmg). Foi proposto por Frank Ramsey em seu artigo de 1927. Em sua essência, são preços lineares que maximizam o bem-estar sujeitos à restrição de *breakeven* da firma (receita=custo total).

(a) Suponha um monopolista produtor de K produtos tal que:

$$\begin{aligned} C(q_1, ..., q_K) &\quad \text{é a função custo total de produção} \\ p_k = P_k(q_k) = S'(q_k) &\quad \text{é a função demanda inversa} \end{aligned}$$

Problema do regulador:

$$\begin{aligned} \underset{\{q_1,...,q_K\}}{\text{Max}} \quad & \sum_k S(q_k) - C(q_1, ..., q_K) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_k P_k(q_k)q_k - C(q_1, ..., q_K) \geq 0 \end{aligned}$$

CPO:

$$S'(q_k) - C_k(q_1, ..., q_K) + \mu \left[P'(q_k)q_k + P(q_k) - C_k(q_1, ..., q_K)\right] = 0$$

$$\begin{aligned} p_k - C_k(q) + \mu \left[P'(q_k) + p_k - C_k(q)\right] &= 0 \\ (1+\mu)\left[p_k - C_k(q)\right] &= -\mu P'(q_k)q_k \\ p_k - C_k(q) &= -\frac{\mu}{1+\mu}P'(q_k)q_k \\ \frac{p_k - C_k(q)}{p_k} &= -\frac{\mu}{1+\mu}\frac{P'(q_k)q_k}{p_k} \\ \frac{p_k - C_k(q)}{p_k} &= \frac{\mu}{1+\mu}\frac{1}{\eta} \end{aligned}$$

Ou seja, a fórmula de Ramsey diz que o mark-up é inversamente proporcional à elasticidade-preço da demanda (μ é o multiplicador de Lagrange – preço sombra da restrição orçamentária).

(b) **Implicações do preço de Ramsey:**

- Para cobrir custos totais, empresa regulada precifica acima do custo marginal
- Mark-up é maior quanto menor a elascitidade (*Inverse Elasticity Rule – IER*)
- Custos fixos comuns aos diversos produtos são recuperados via mark-ups diferenciados pela elasticidade de cada grupo de consumidores
- Apreçamento de Ramsey gera menor perda de bem-estar para a sociedade do que outras formas de apreçamento LINEARES

(c) **Críticas:**

- Preocupações com distribuição de renda: aqueles com demanda mais inelástica (por exemplo, serviço regulado essencial, energia elétrica) são os que pagam maior mark-up, isto é, são os que cobrem maior parcela dos custos fixos

– Se há livre entrada no mercado, algumas empresas podem entrar no segmento mais lucrativo do mercado: apreçamento de Ramsey pode não ser sustentável

– Não é Pareto-ótimo

Exercício 4.

Demanda de pico: $q^p = 10 - p^p$ Demanda fora de pico: $q^o = 4 - p^o$

(a) Em geral, é muito custoso (ou impossível) estocar energia elétrica. Dessa maneira, a capacidade ótima deve ser tal que a firma possa fornecer energia em qualquer período. Isso significa que a capacidade ótima é determinada pela demanda de pico.

Os usuários do pico devem pagar pelos custos de capacidade. Assim, p^p é igual ao custo marginal de longo prazo, ou seja:

$$\begin{aligned} & p^p = 0.2 + 0.3 = 0.5 \\ \Rightarrow \quad & q^p = 10 - 0.5 = 9.5 = K \end{aligned}$$

em que K é a capacidade ótima.

Os usuários do período fora de pico pagam somente pelo custo variável:

$$\begin{aligned} & p^0 = 0.2 \\ \Rightarrow \quad & q^o = 4 - 0.2 = 3.8 \end{aligned}$$

Note que sob preços de pico a firma cobre exatamente os custos variáveis e o custo de investimento em capacidade (i.e., atinge o *breakeven*) e portanto o lucro é zero.

(b) Se o preço deve ser o mesmo durante todo o dia, o excedente do consumidor será:

$$EC = \frac{1}{2}(4 - \bar{p})^2 + \frac{1}{2}(10 - \bar{p})^2$$

e o excedente do produtor será:

$$EP = \bar{p}(4 - \bar{p}) + \bar{p}(10 - \bar{p}) - 0.2(14 - 2\bar{p}) - 0.3(10 - \bar{p})$$

Assim, o excedente total:

$$ET = EC + EP = -\bar{p}^2 + 0.7\bar{p} + 52.2$$

Maximizando o excedente total com relação a $\bar{p}$, temos que o preço uniforme ótimo é $\bar{p} = \frac{7}{20}$.

(c) Temos que:

$$\begin{aligned} EC_a &= \frac{1}{2}(3.8)^2 + \frac{1}{2}(9.5)^2 = 52.35 \\ EC_b &= \frac{1}{2}(4 - \frac{7}{20})^2 + \frac{1}{2}(10 - \frac{7}{20})^2 = 53.22 \end{aligned}$$

Além disso temos:

$$\begin{aligned}
EP_a &= 0 \\
EP_b &= \frac{7}{20}(4-\frac{7}{20})+\frac{7}{20}(10-\frac{7}{20})-0.2(14-2\frac{7}{20})-0.3(10-\frac{7}{20}) \\
&= 1,2775+3,3775-2,66-2,895=-0,9
\end{aligned}$$

Logo a perda de bem-estar pela restrição de preço uniforme é de 0,03.

Exercício 5.

(a) Defina respectivamente os excedentes do consumidor V e da furma U:

$$\begin{aligned}
V = S-(1+\lambda)\left[t+\beta-e\right] \\
U = t-\psi\left(e\right)
\end{aligned}$$

Em um ambiente de informação completa, um regulador utilitarista maximiza a soma $V+U$ sujeito à restrição de participação da firma $U \geq 0$.

Fazendo $t = U + \psi\left(e\right)$, podemos reescrever o problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\underset{e,U}{\text{Max}} \quad S-(1+\lambda)\left[U+\psi\left(e\right)+\beta-e\right]+U \\
s.a. \quad U \geq 0
\end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}
\underset{e,U}{\text{Max}} \quad S-(1+\lambda)\left[\beta-e+\psi\left(e\right)\right]-\lambda U \\
s.a. \quad U \geq 0
\end{aligned}$$

Como o excedente total é decrescente em U, a restrição vale com igualdade ($U=0$) e podemos substituir na função objetivo:

$$\underset{e}{\text{Max}} \quad S-(1+\lambda)\left[\beta-e+\psi\left(e\right)\right]$$

A condição de primeira ordem desse problema nos dá:

$$\psi'\left(e^{\star}\right)=1$$

E assim temos o ótimo de *1st Best*:

$$\begin{aligned} e^\star &= \psi'^{-1}(1) \\ U^\star &= 0 \\ t^\star &= \psi(e^\star) \end{aligned}$$

(b) Fazendo $e_i = \beta_i - C_i$ para $i \in \{L, H\}$, as restrições de compatibilidade em incentivos são dadas por:

$$\begin{aligned} U_L = t_L - \psi(\beta_L - C_L) \geq t_H - \psi(\beta_L - C_H) \\ U_H = t_H - \psi(\beta_H - C_H) \geq t_L - \psi(\beta_H - C_L) \end{aligned}$$

Somando as duas restrições, temos que:

$$\begin{aligned} \psi(\beta_H - C_L) + \psi(\beta_L - C_H) - \psi(\beta_L - C_L) - \psi(\beta_H - C_H) \geq 0 \\ \Rightarrow \quad \int_{C_L}^{C_H}\int_{\beta_L}^{\beta_H} \psi''(\beta - C)\, d\beta dC \geq 0 \\ \Rightarrow \quad C_H \geq C_L \\ \text{já que } \psi'' > 0 \text{ e } \beta_H > \beta_L \end{aligned}$$

Ou seja, a primeira consequência da compatibilidade em incentivos é que o custo da firma eficiente (β_L) é inferior ao custo da firma ineficiente (β_H). As restrições de participação são expressas por:

$$\begin{aligned} U_L = t_L - \psi(\beta_L - C_L) \geq 0 \\ U_H = t_H - \psi(\beta_H - C_H) \geq 0 \end{aligned}$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned} U_H &\geq t_H - \psi(\beta_L - C_H) \quad \text{pela restrição } [IC_L] \\ &\geq \psi(\beta_H - C_H) - \psi(\beta_L - C_H) \quad \text{pois } [IR_H] \Rightarrow t_H \geq \psi(e_h) \\ &\geq \psi(\beta_L - C_H) - \psi(\beta_L - C_H) \quad \text{pois } \beta_H > \beta_L \text{ e } \psi' > 0 \\ &= 0 \\ &\text{portanto } [IR_H] \text{ sempre é satisfeita e podemos desconsiderá-la} \end{aligned}$$

Denote:

$$\begin{aligned}
W_i &= S - (1+\lambda)\left[t_i + C_i\right] + t_i - \psi\left(\beta_i - C_i\right) \\
&= S - (1+\lambda)\left[C_i + \psi\left(\beta_i - C_i\right)\right] - \lambda U_i \\
i &\in \{L, H\}
\end{aligned}$$

Temos que o problema do regulador sob assimetria de informação é:

$$\begin{aligned}
\underset{C_L,C_H,U_L,U_H}{\text{Max}} \quad & \pi W_L + (1-\pi) W_H \\
s.a. \quad & U_H \geq 0 \\
& U_L \geq t_H - \psi\left(\beta_H - C_H\right)
\end{aligned}$$

Observe que omitimos a restrição $[IC_H]$. Isto porque o método requer que primeiro se resolva o problema do regulador supondo que a restrição $[IC_H]$ não seja *binding* e depois verifica-se que o contrato ótimo atende aquela restrição.

Note que a função objetivo é estritamente decrescente em U_H e U_L, logo a maximização implica que as restrições $[IR_H]$ e $[IC_L]$ são satisfeitas com igualdade, isto é, $U_H = 0$ e $U_L = t_H - \psi\left(\beta_H - C_H\right)$.

Em particular, definimos a função auxiliar $\Phi(e) \equiv \psi(e) - \psi(e - \Delta\beta)$, onde $\Delta\beta = \beta_H - \beta_L > 0$, o que nos permite reescrever a restrição $[IC_L]$ de uma forma mais conveniente:

$$\begin{aligned}
U_L &\geq t_H - \psi\left(\beta_L - C_H\right) \qquad \text{, mas } t_H = U_H + \psi\left(\beta_H - C_H\right) \\
&= U_H + \psi\left(\beta_H - C_H\right) - \psi\left(\beta_L + \beta_H - \beta_H - C_H\right) \\
&= U_H + \psi\left(e_H\right) - \psi\left(e_H - \Delta\beta\right) \\
&= U_H + \Phi(e_H)
\end{aligned}$$

A função $\Phi(e)$ representa a renda informacional da firma eficiente, e é crescente em e.[1] Substituindo $U_H = 0$ e $U_L = U_H + \Phi(\beta_H - C_H)$ na função objetivo, temos a otimização irrestrita:

$$\begin{aligned}
\underset{C_L,C_H}{\text{Max}} \quad & \pi \left\{S - (1+\lambda)\left[C_L + \psi\left(\beta_L - C_L\right)\right] - \lambda\Phi(\beta_H - C_H)\right\} \\
& +(1-\pi)\left\{S - (1+\lambda)\left[C_H + \psi\left(\beta_H - C_H\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

[1] De fato, como $\psi'' > 0$ e uma propriedade das funções convexas é que $\psi(x) \geq \psi(y) + \psi'(x-y)$, $\forall x, y$, temos que, dados $\tilde{e} > e$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{e}) &= \psi(\tilde{e}) - \psi(\tilde{e} - \Delta\beta) \geq \psi'(\tilde{e} - \Delta\beta)(\Delta\beta) \\
&\geq \psi'(e - \Delta\beta)(\Delta\beta + e - e) \geq \psi(e) - \psi(e - \Delta\beta) = \Phi(e)
\end{aligned}$$

Fazendo as condições de primeira ordem:

$$\begin{aligned} -\pi(1+\lambda)\left[1-\psi'\left(\beta_L - C_L\right)\right] &= 0 \\ \Rightarrow \quad \psi'\left(e_L\right) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi\lambda\Phi'(\beta_H - C_H) + (1-\pi)(1+\lambda)\left[1-\psi'\left(\beta_H - C_H\right)\right] &= 0 \\ \Rightarrow \quad \psi'\left(\beta_H - C_H\right) = 1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\pi}{1-\pi}\left[\Phi'\left(\beta_H - C_H\right)\right] \\ \Rightarrow \quad \psi'\left(e_H\right) = 1 - \underbrace{\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\pi}{1-\pi}}_{>0}\underbrace{\left[\psi'\left(e_H\right) - \psi'\left(e_H - \Delta\beta\right)\right]}_{>0 \text{ pois } \psi''>0} \end{aligned}$$

Da primeira CPO temos que $\psi'(e_L) = 1 = \psi'(e^\star)$, o que implica $e_L = e^\star$, ou seja, o esforço da firma eficiente no *2nd Best* é idêntico ao nível de *1st Best*.

Da segunda CPO temos que $\psi'(e_H) < 1 = \psi'(e^\star) \Rightarrow e_H < e^\star$, ou seja, o nível de esforço da firma ineficiente é subótimo em relação ao *1st Best*.

Verificando que o ótimo satisfaz à restrição $[IC_H]$:

$$\begin{aligned} U_H &\geq t_L - \psi\left(\beta_H - C_L\right) \\ &= U_L + \psi\left(\beta_L - C_L\right) - \psi\left(\beta_H - C_L\right) \\ &= U_L - \left[\psi\left(\beta_H - C_L\right) - \psi\left(\beta_H - C_L \underbrace{-\beta_H + \beta_L}_{-\Delta\beta}\right)\right] \\ &= U_L - \Phi\left(\beta_H - C_L\right) \end{aligned}$$

Esta condição é satisfeita somente se:

$$\begin{aligned} 0 &\geq U_L - \Phi\left(\beta_H - C_L\right) = \Phi\left(\beta_H - C_H\right) - \Phi\left(\beta_H - C_L\right) \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\beta_H - C_L\right) \geq \Phi\left(\beta_H - C_H\right) \\ &\Leftrightarrow \beta_H - C_L \geq \beta_H - C_H \\ &\Leftrightarrow C_L \leq C_H \quad \text{, o que é verdade} \end{aligned}$$

Portanto, temos a caracterização do ótimo de *2nd Best*:

$$\begin{aligned}
\psi'\left(e_L\right) &= 1 = \psi'\left(e^\star\right) \\
\psi'\left(e_H\right) = 1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\pi}{1-\pi}\left[\Phi'\left(e_H\right)\right] &< 1 = \psi'\left(e^\star\right) \\
U_L = \Phi(e_H) &> 0 = U^\star \\
U_H &= 0 = U^\star \\
t_H = U_L + \psi(e_L) &= \Phi(e_H) + \psi(e_L) \\
t_H = U_H + \psi(e_H) &= \psi(e_H)
\end{aligned}$$

Concluímos que, no contrato ótimo com assimetria de informação, o regulador extrai toda a renda do tipo ineficiente β_H, mas distorce o seu nível e esforço, enquanto deixa para o tipo eficiente β_L uma renda informacional igual a $\Phi(e_H)$ para induzí-lo a prover o nível de esforço ótimo.