1 Modelo de subcontratação ótima com transferências e custos observáveis (modelo canônico)

1.1 Características do modelo:

- Modelo de subcontratação (*procurement*) de um projeto de tamanho fixo com valor social S
- Agentes econômicos: regulador (principal) e firma regulada (agente)
- Permite transferências, mas os fundos públicos incorrem em perdas de peso morto devido a distorções no sistema tributário, caputuradas pelo parâmetro λ. Para cada \$1 transferido para a firma, o governo deve arrecadar $\$(1+\lambda)$ dos contribuintes
- Portanto, bem-estar líquido para a sociedade decorrente do projeto é $V = S - (1 + \lambda)T$, onde T é o pagamento feito pelo regulador à firma
- Firma provê o projeto a um custo $C = \theta - e$, onde θ é o parâmetro de eficiência da empresa e $e \geq 0$ é o esforço de redução de custos
  - $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$ com $\theta_L < \theta_H$ (firma θ_L é mais eficiente)
  - Esforço gera desutilidade para a firma medida por $\psi(e)$, sendo $\psi' > 0$, $\psi'' > 0$ e $\lim\limits_{e \to \theta} \psi(e) = \infty$ (função desutilidade do esforço convexa)
- Regulador observa o custo total C (custos auditáveis ex post), mas não a sua decomposição em θ e e (informação assimétrica)
- Regulador faz pagamento $T = t + C$ para a firma realizar o projeto; logo, reembolsa seus custos e paga uma transferência líquida t
- Utilidade ou payoff da firma regulada:

$$
\begin{aligned}
U &= T - C - \psi(e) \\
&= (t + C) - C - \psi(e) \\
&= t - \psi(e)
\end{aligned}
$$

- Utilidade de reserva da firma é $U_0 = 0$, o que nos dá uma restrição de participação da forma:

$$U = t - \psi(e) \geq 0$$

- Regulador benevolente (maximiza bem-estar social) e utilitarista (pesos iguais para os contribuintes e para os acionistas da firma). Assim, temos a função de bem-estar dada por:

$$\begin{aligned} W &= V + U \\ &= [S - (1+\lambda)(t + C))] + [t - \psi(e)] \end{aligned}$$

Note que $C = \theta - e$ e $t = U + \psi(e)$, portanto podemos escrever:

$$\begin{aligned} W &= S - (1+\lambda)(U + \psi(e) + \theta - e)) + U \\ &= S - (1+\lambda)(\theta - e + \psi(e)) - \lambda U \end{aligned}$$

- A equação acima diz que o bem-estar social é a diferença entre o excedente bruto S e o custo total de prover o projeto (monetário C e não-monetário $\psi(e)$)
- Essa forma de representar o bem-estar deixa explícito que a função objetivo do regulador é estritamente decrescente na renda da firma U, logo esta será a menor possível

1.2 Resolução do modelo para o caso de informação completa (*benchmark*)

- O problema do regulador sob informação simétrica é dado por:

$$\begin{aligned} \underset{e}{\text{Max}} \quad & S - (1+\lambda)\left[\theta - e + \psi(e)\right] - \lambda U \\ \text{s.a.} \quad & U \geq 0 \end{aligned}$$

- Como transferir renda para a firma é socialmente custoso, a alocação ótima satisfaz a restrição de participação com igualdade:

$$U^* = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \psi(e)$$

- Podemos reescrever a função objetivo como:

$$\underset{e}{\text{Max}} \quad S - (1+\lambda)\left[\theta - e + \psi(e)\right]$$

- Calculando a condição de primeira ordem:

$$\begin{aligned} (1+\lambda)\left[-1 + \psi'(e)\right] &= 0 \\ \psi'(e^*) &= 1 \end{aligned}$$

- Sob informação completa, o regulador consegue implementar solução de esforço eficiente: benefício marginal (*cost-savings*) decorrente do esforço igual ao custo marginal (desutilidade)
- Como o regulador conhece o parâmetro de eficiência θ, ele consegue implementar esse resultado mesmo que não observe diretamente o esforço (já que ele pode inferir e a partir de C e θ)

1.3 Resolução do modelo para o caso de informação assimétrica

- Regulador não observa o parâmetro θ, mas possui conhecimento (*prior*) sobre a sua distribuição: o regulador sabe que $\Pr(\theta = \theta_L) = \nu$ e $\Pr(\theta = \theta_H) = 1-\nu$. Definimos $\Delta\theta = \theta_H - \theta_L$
- O regulador observa o custo C e oferece uma transferência líquida t para a firma. O contrato, portanto, é definido como um par (t, C) para cada tipo de firma, ou seja, $\{(t_L, C_L), (t_H, C_H)\}$
- O contrato ótimo deve satisfazer às restrições de participação ou racionalidade individual (IR) de cada firma:

$$U_L = t_L - \psi(e_L) \geq 0 \qquad (\text{IR}_L)$$
$$U_H = t_H - \psi(e_H) \geq 0 \qquad (\text{IR}_H)$$

- O contrato ótimo deve satisfazer às restrições de compatibilidade em incentivos (IC) de cada firma (note que $e = \theta - C$):

$$U_L = t_L - \psi(\theta_L - C_L) \geq t_H - \psi(\theta_L - C_H) \qquad (\text{IC}_L)$$
$$U_H = t_H - \psi(e_H) \geq t_L - \psi(\theta_H - C_L) \qquad (\text{IC}_H)$$

- A primeira consequência da compatibilidade em incentivos é que o contrato ótimo estipula $C_H \geq C_L$. Para ver isso, vamos somar as restrições (IC_L) e (IC_H):

$$\begin{aligned} \psi(\theta_L - C_H) + \psi(\theta_H - C_L) - \psi(\theta_L - C_L) - \psi(\theta_H - C_H) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad \int_{C_L}^{C_H} \int_{\theta_L}^{\theta_H} \psi''(\theta - C) d\theta dC \geq 0 \end{aligned}$$

- Logo, dadas as hipóteses de que $\psi'' > 0$ e $\theta_H > \theta_L$, temos que $C_H > C_L$.
- Vamos definir uma funçao auxiliar $\Phi(e) \equiv \psi(e) - \psi(e - \Delta\theta)$, a qual mais adiante será interpretada como a renda informacional. Vamos reescrever as restrições de incentivos:
  - Restrição (IC_L)

$$\begin{aligned} U_L = t_L - \psi(\theta_L - C_L) &\geq t_H - \psi(\theta_L - C_H) \\ &= t_H - \psi(\theta_L - C_H) + \psi(e_H) - \psi(e_H) \\ &= [t_H - \psi(e_H)] + [\psi(e_H) - \psi(\theta_L - C_H + \theta_H - \theta_H)] \\ &= U_H + [\psi(e_H) - \psi(e_H - \Delta\theta)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_L \geq U_H + \Phi(e_H)$$

- Restrição (IC$_H$)

$$\begin{aligned} U_H = t_H - \psi(e_H) &\geq t_L - \psi(\theta_H - C_L) \\ &= t_L - \psi(\theta_H - C_L) + \psi(e_L) - \psi(e_L) \\ &= [t_L - \psi(e_L)] + \psi(e_L) - \psi(\theta_H - C_L + \theta_L - \theta_L) \\ &= U_L - [\psi(e + \Delta\theta) - \psi(e)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_H \geq U_L - \Phi(e_L + \Delta\theta)$$

- O problema do regulador é maximizar o bem-estar esperado sujeito às restrições de participação (IR) e de incentivos (IC):

$$\begin{aligned} \underset{e,U}{\text{Max}} \quad & E_\theta \left\{ S - (1+\lambda) \left[\theta - e + \psi(e) \right] - \lambda U \right\} \\ \text{s.a.} \quad & U_L \geq 0 \\ & U_H \geq 0 \\ & U_L \geq U_H + \Phi(e_H) \\ & U_H \geq U_L - \Phi(e_L + \Delta\theta) \end{aligned}$$

- Observe que se (IR$_H$) e (IC$_L$) são válidas, então (IR$_L$) é atendida:

$$\begin{aligned} U_L & \underset{(IC_L)}{\geq} U_H + \Phi(e_H) \\ & \underset{\Phi'>0}{\geq} U_H \underset{(IR_H)}{\geq} 0 \end{aligned}$$

- Portanto a restrição (IR$_L$) é redundante. Além disso, resolveremos o problema sem a restrição (IC$_H$) e verificaremos que ela é satisfeira pela solução ótima

- O problema do regulador se reduz a:

$$\begin{aligned} \underset{e_L, e_H, U_L, U_H}{\text{Max}} \quad & \nu \left\{ S - (1+\lambda) \left[\theta_L - e_L + \psi(e_L) \right] - \lambda U_L \right\} \\ & + (1-\nu) \left\{ S - (1+\lambda) \left[\theta_H - e_H + \psi(e_H) \right] - \lambda U_H \right\} \\ \text{s.a.} \quad & U_L \geq 0 \\ & U_H \geq 0 \\ & U_L \geq U_H + \Phi(e_H) \end{aligned}$$

- Como a função objetivo é decrescente em U_L e em U_H, as restrições valem com igualdade e temos que, no ótimo:

$$U_H = 0$$
$$U_L = \Phi(e_H)$$

- Daí vem a interpretação de $\Phi(e_H)$ como renda informacional da firma eficiente
- Note que U_L depende positivamente do esforço realizado pela firma ineficiente, daí o tradeoff clássico do modelo de regulação por incentivos entre eficiência (nível de esforço realizado para reduzir custos) e renda informacional
- Substituindo as restrições de igualdade na função objetivo:

$$\begin{aligned} \underset{e_L, e_H}{\text{Max}} \quad & \nu \left\{ S - (1+\lambda) \left[\theta_L - e_L + \psi(e_L) \right] - \lambda \Phi(e_H) \right\} \\ & + (1-\nu) \left\{ S - (1+\lambda) \left[\theta_H - e_H + \psi(e_H) \right] \right\} \end{aligned}$$

- Encontrando as condições de primeira ordem:

(e_L):

$$\begin{aligned} \nu(1+\lambda) \left[-1 + \psi'(e_L) \right] = 0 \\ \psi'(e_L) = 1 \end{aligned}$$

(e_H):

$$\begin{aligned} -\nu\lambda\Phi'(e_H) - (1-\nu)(1+\lambda) \left[-1 + \psi'(e_H) \right] &= 0 \\ (1-\nu)(1+\lambda)\psi'(e_H) &= (1-\nu)(1+\lambda) - \nu\lambda\Phi'(e_H) \\ \psi'(e_H) &= 1 - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\lambda}{1+\lambda}\Phi'(e_H) \end{aligned}$$

- Resumo dos resultados:

$$\begin{aligned} \psi'(e_L) &= 1 \\ \psi'(e_H) &= 1 - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\lambda}{1+\lambda}\Phi'(e_H) \end{aligned}$$

- Note que o esforço da firma eficiente é idêntico ao benchmark de informação completa, logo não há distorção. Já o esforço da firma ineficiente e distorcido para baixo ($e_H < e^*$), de modo a reduzir a renda informacional da firma eficiente $\Phi(e_H)$
- Além disso, a renda informacional da firma eficiente é distorcida do benchmark ($U_L > U^* = 0$) para induzir a firma eficiente a revelar seu tipo verdadeiro
- Essas distorções em relação ao caso de informação completa caracterizam o contrato ótimo como uma solução de *second-best*

- Dados e_L, e_H, U_L e U_H temos que o contrato ótimo é dado por:

$$t_L = \Phi(e_H) + \psi(e_L) \qquad\qquad C_L = \theta_L - e_L$$
$$t_H = \psi(e_H) \qquad\qquad C_H = \theta_H - e_H$$

- Este contrato é ótimo pois (i) induz o bem-estar máximo dadas as restrições, (ii) induz a participação dos dois tipos de firma, e (iii) induz a auto-seleção das firmas para o seu respectivo tipo de contrato

- Para ver a propriedade (iii), note que por ser solução do problema, o contrato satisfaz (IC$_L$). Resta verificar que o contrato também satisfaz (IC$_L$):

$$\begin{aligned} & U_H \geq U_L - \Phi(e_L + \Delta\theta) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \geq \Phi(e_H) - \Phi(e_L + \Delta\theta) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \geq \Phi(\theta_H - C_H) - \Phi(\theta_H - C_L) \end{aligned}$$

- Esta última desigualdade é verdadeira pois $C_H > C_L$ e $\Phi' > 0$, logo a condição (IC$_L$) é satisfeita

1.4 Poder de incentivos

- Para finalizar, vamos reinterpretar o contrato ótimo em termos de poder do esquema de incentivos

- Suponha que, ao invés de um par (t, C), o regulador ofereça um reembolso igual a uma proporção α dos custos e deixe a firma escolher o esforço. Em outras palavras, a transferência líquida poderá ser expressa como $t = \alpha C$

- Agora a utilidade da firma passa a ser $U = \alpha C - C - \psi(e)$, onde $C = \theta - e$ e portanto a transferência é endógena no problema da firma. Agora maximizar utilidade é a mesma coisa que minimizar custos, logo o ótimo da firma é caracterizado por:

$$\underset{e}{\text{Max}} \quad (1-\alpha)(\theta - e) + \psi(e)$$

- A condição de primeira ordem desse problema caracteriza a escolha de esforço da firma:

$$\psi'(e) = (1 - \alpha)$$

- Definimos a expressão $(1 - \alpha)$ com o **poder de incentivos** do contrato ótimo

- Quanto maior α, menores os incentivos para que a firma exerça esforço de redução de custos. Para ver isso, note que $\psi'' > 0$, o que implica que ψ' é função crescente do esforço. Assim, o esforço ótimo implícito na CPO acima pode ser escrito $e = (\psi')^{-1}(1 - \alpha)$, e é crescente no poder de incentivos (logo decrescente em α)

- O contrato estabelece (α_L, α_H) de modo que as firmas se auto-selecionem para o contrato respectivo ao seu tipo. Portanto, o contrato deve induzir as firmas a realizar o esforço ótimo de second-best. Logo, os valores de α_L e α_H devem satisfazer a CPO da firma e as condições do problema canônico

- A CPO que determina o nível de esforço ótimo da firma eficiente é $\Psi'(e_L) = 1$

- Esta condição pode ser reinterpretada como $\alpha_L = 0$, i.e. um contrato sem reembolso de custos. O contrato escolhido pela firma eficiente será então um de reembolso fixo $T = C$ (alto poder de incentivos), o que induz a firma a exercer o nível máximo de esforço de redução de custos

- A CPO que determina o nível de esforço ótimo da firma ineficiente é: $\Psi'(e_H) = q_H - \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\nu}{1-\nu}\Phi'(e_H)$

- Esta condição pode ser reinterpretada como $\alpha_H = \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\Phi'(e_H)}{q_H}$, i.e. uma parte dos custos de realizar esforço é reembolsada $T = C + \alpha_H C$ (baixo poder de incentivos), o que induz a firma a exercer um nível de esforço abaixo do ótimo