# Preços de pico

O problema de precificação por preços de pico está relacionado à utilização de capacidade produtiva para prover um serviço em diferentes temporadas ou horários do dia, em que há saturação de capacidade ou não. O custo marginal não é o mesmo nas duas situações, já que quando atinge-se a capacidade máxima e é impossível expandir no custo prazo.

Considere uma firma que escolhe capacidade $K$ por $n$ períodos. O custo de investimento é $c_0 K$. Na data $t \in \{1, ...n\}$, a firma produz $q_t \leq K$ ao custo variável $cq_t$. Logo o custo marginal de curto prazo é $c$ se $q_t < K$ e $+\infty$ se $q_t \geq K$. O custo marginal de longo prazo é $[c_0 + c]$.

## Caso 1: Demandas Inelásticas

Suponha que em todos os estados as demandas sejam preço-inelásticas. Por simplicidade, suponha que exista um único pico em $t = H$. Para satisfazer a demanda, a capacidade deve ser igual à demanda de pico, logo $K = q_H$. Além disso a eficiência requer:

$$P_t = c, \text{ para } t \neq H$$
$$P_H = c_0 + c$$

Note que, no caso de demanda inelástica, o preço não é variável de maximização, mas vale notar que se houver retornos constantes de escala e $P = Cmg$, então temos equilíbrio orçamentário (*breakeven*) exatamente quando a capacidade é igual à demanda de pico. De fato, a receita total é:

$$C(\sum_{t \neq H} q_t) + (c + c_0)q_h$$

Enquanto a soma do investimento total é

$$c(\sum_t q_t) + c_0 K$$

Essas duas expressões se igualam quando $K = q_H$.

## Caso 2: Demandas Independentes

Suponha agora que a demanda no período $t$ dependa apenas do preço naquele período, e que a função de demanda seja negativamente inclinada: $q_t = D_t(P_t)$. Nesse caso, teremos em geral que o pico da demanda muda em resposta ao alto custo de investimento, de modo que o apreçamento por custo marginal deprimie os picos. A otimalidade de Pareto requer $P = Cmg$ e equilíbrio de *breakeven*. Logo a capacidade $K$ e os preços $P_t$ são determinados simultaneamente no seguinte sistema de equações. Sejam $T_1 \equiv \{t | D_t(c) \leq K\}$ e $T_2 \equiv \{t | D_t(c) > K\}$ os conjuntos referentes aos períodos fora e dentro de pico, respectivamente. Então:

$$
\begin{aligned}
P_t &= c, \text{ para } t \in T_1 \\
D_t(P_t) &= K, \text{ para } t \in T_2 \\
\sum_{t \in T_2} (P_t - c) &= c_0
\end{aligned}
$$

Onde a última equação satisfaz o equilíbrio orçamentário. Para ver que este fato, note que:

$$\sum_t (P_t - c) D_t(P_t) - c_0 K = \left[ \sum_{t \in T_2} (P_t - c) - c_0 \right] K = 0$$

## Exercício

Uma firma se depara com curvas de demanda em três estações do ano: $Q_1(p)$, $Q_2(p)$ e $Q_3(p)$. O custo operacional variável de 10, enquanto os custos de investimento são dados por 20 por unidade de capacidade.

(a) Suponha que a demanda seja fixa, igual a $Q_1 = 60$, $Q_2 = 100$ e $Q_3 = 150$ nas respectivas estações. Encontre os preços ótimos e a capacidade que deve ser construída.

(b) Suponha agora que as funções de demanda sejam dadas por $Q_1(p) = 100 - 10P$, $Q_2(p) = 250 - 10P$ e $Q_3(p) = 350 - 10P$. Encontre os preços ótimos e a capacidade que deve ser construída caso (i) a demanda no segunda estação ($D_2(p)$) seja considerada fora de pico e (ii) a demanda na segunda estação seja de pico.

(c) Qual dos casos (i) ou (ii) é eficiente? Compare o bem-estar.

## Solução

(a) O problema quando a demanda é inelástica a preços tem a seguinte solução:

$$
\begin{aligned}
P_1 = P_2 = c &= 10 \\
P_3 = c_0 + c &= 30 \\
K^\star = q_3 &= 150 \\
q_1 &= 60 \\
q_2 &= 100
\end{aligned}
$$

(b) Primeiro caso: $q_2$ é demanda fora de pico.

$$
\begin{aligned}
P_1 = P_2 = c = 10 \\
P_3 - c = c_0 \quad \Rightarrow \quad P_3 = 30 \\
K^\star = q_3(c + c_0) \quad \Rightarrow \quad K^\star = q_3 = 500 - 10 \times 30 = 200 \\
q_1 = q_1(c) = 150 - 10 \times 10 = 50 \\
q_2 = q_2(c) = 250 - 10 \times 10 = 150
\end{aligned}
$$

Segundo caso: $q_2$ é demanda de pico.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= c = 10 \\
q_1 &= q_1(c) = 50
\end{aligned}
$$

A capacidade e os preços de pico são determinados no seguinte sistema:

$$
\begin{cases}
K = q_2(P_2) \\
K = q_3(P_3) \\
(P_2 - c) + (P_3 - c) = c_0
\end{cases}
$$

Das duas primeiras, temos:

$$
\begin{aligned}
q_2(P_2) &= q_3(P_3) \\
250 - 10P_2 &= 500 - 10P_3 \\
P_3 &= P_2 + 25
\end{aligned}
$$

Jogando na restrição:

$$
\begin{aligned}
P_2 - 10 + (P_2 + 25) - 10 &= 20 \\
P_2 &= 15 \\
\Rightarrow \quad P_3 &= 15 + 25 = 40
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
K^\star = q_2(15) = q_3(40) = 100
$$

(c) Para encontrar a alocação ótima, devemos perguntar: qual é a alternativa que provoca menor perda de peso morto no curto-prazo? Para isso computaremos o triângulo de Harberger nos cassos (i) e (ii).

Note que:

$$DWL_i = \frac{1}{2}(P_i - c)(q_i(c) - q_i(P_i))$$

No caso (i) temos $P = Cmg$ no primeiro e segundo estado. Portanto:

$$DWL_3 = \frac{1}{2}(20)(400 - 200) = 2000$$

No caso (ii) temos perda de peso morto nos estados 1 e 2:

$$DWL_2 = \frac{1}{2}(20)(150 - 100) = 500$$
$$DWL_3 = \frac{1}{2}(20)(400 - 100) = 3000$$

Como a perda de peso morto no curto prazo é menor no caso (i), concluímos que a alternativa ótima de preços de pico é aquela em que somente $q_3$ é demanda de pico e os preços são dados como em (i).

Note que, no longo prazo, qualquer alternativa é eficiente.