PROFESSOR: FERNANDO VELOSO — POLÍTICA ECONÔMICA - 2019

MONITOR: CARLOS MAGNO REIS — EPGE/FGV

GABARITO - 5ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercício 1.

(a) O problema do Banco Central quando adota uma política discricionária é uma otimização feita a cada periodo do tempo. A ideia é similar ao problema da firma do modelo neoclássico que vimos na lista 3. Logo, o problema é:

$$\min_{\{\pi_t, x_t, i_t\}} \quad \frac{1}{2}(\pi_t^2 + \alpha_x x_t^2) \tag{1}$$

sujeito a

$$\begin{array}{ll} \pi_t = \beta \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \kappa x_t + u_t & (i) \\ x_t = \mathbb{E}_t[x_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] - r_t^e) & (ii) \end{array} \tag{2}$$

O Lagrangeano associado a esse problema será:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi_t^2 + \alpha_x + x_t^2) + \lambda_t(\pi_t - \beta \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] - \kappa x_t - u_t) + \mu_t \left(x_t - \mathbb{E}_t[x_{t+1}] + \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] - r_t^e) \right) \tag{3}$$

Em que λ_t e μ_t são os multiplicadores de Lagrange associados a cada restrição.

As C.P.O.s são:

$$[\pi_t]: \quad \pi_t + \lambda_t = 0 \quad \Rightarrow \lambda_t = -\pi_t \tag{4}$$

$$[x_t]: \quad \alpha_x x_t - \lambda_t \kappa + \mu_t = 0 \tag{5}$$

$$[i_t]: \quad \mu_t \sigma^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \mu_t = 0 \tag{6}$$

A equação (6) implica que a restrição (ii) não será ativa no ótimo. Quando multiplicadores de Lagrange são idênticos a zero no ótimo, temos que a restrição associada à eles não será igual a "zero" também e, logo, deve ser satisfeita com desigualdade estrita. Isso faz com que possamos "ignorá-la" ao longo da caracterização da solução do problema.

De (6) em (5), temos que $\alpha_x x_t = \lambda_t \kappa$. Substituindo em (4), temos que $\alpha_x x_t = -\pi_t \kappa$. Assim,

$$x_t = -\frac{\kappa}{\alpha_x}\pi_t \tag{7}$$

Como resolvemos para x_t, voltamos na restrição para π_t, (ii), para fazer a substituição e procedermos com a resolução do sistema.

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \kappa\left(\frac{-\kappa}{\alpha_x}\pi_t\right) + u_t = \beta\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] - \frac{\kappa^2}{\alpha_x}\pi_t + u_t \tag{8}$$

$$\Rightarrow \pi_t\left(1 + \frac{\kappa^2}{\alpha_x}\right) = \beta\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + u_t \tag{9}$$

$$\Rightarrow \pi_t = \left(\frac{\alpha_x\beta}{\alpha_x + \kappa^2}\right)\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \left(\frac{\alpha_x}{\alpha_s + \kappa^2}\right)u_t \tag{10}$$

Como nas primeiras listas, possuímos uma única equação com uma variável endógena, seu component forward-looking e uma variável exógena. Logo, possuímos todas as condições para aplicar o método dos coeficientes indeterminados. A variável u_t é exógena e, assim, faremos nossa conjectura sobre ela:

Conjectura:

$$\pi_t = \gamma u_t \tag{11}$$

Adiantando um período e aplicando a esperança condicional à data t:

$$\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] = \mathbb{E}_t[\gamma u_{t+1}] = \mathbb{E}_t[\gamma\rho_u u_t + \varepsilon_t^u] = \gamma\rho_u u_t \tag{12}$$

Pois ε_t^u possui média zero e u_t é um AR(1).

Aplicando (11) e (12) em (10):

$$\gamma\cancel{u_t} = \left(\frac{\alpha_x\beta}{\alpha_x + \kappa^2}\right)(\gamma\rho_u\cancel{u_t}) + \left(\frac{\alpha_x}{\alpha_x + \kappa^2}\right)\cancel{u_t} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \gamma\underbrace{\left(1 - \frac{\alpha_x\beta\rho_u}{\alpha_x + \kappa^2}\right)}_{=\frac{\kappa^2+\alpha_x(1-\beta\rho_u)}{\alpha_x+\kappa^2}} = \frac{\alpha_x}{\alpha_x + \kappa^2} \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha_x}{\kappa^2 + \alpha_x(1 - \beta\rho_u)} \tag{14}$$

Assim, substituindo na nossa conjectura em (11):

$$\pi_t = \frac{\alpha_x}{\kappa^2 + \alpha_x(1 - \beta\rho_u)}u_t \tag{15}$$

E, voltando mais ainda em (7), temos a solução para x_t:

$$x_t = -\frac{\kappa}{\kappa^2 + \alpha_x(1 - \beta\rho_u)}u_t \tag{16}$$

(b) Na política ótima sob *commitment*, o Banco Central escolhe sequências $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ e $\{\pi_t\}_{t=0}^{\infty}$ com as quais se compromete a cumprir em todos os períodos futuros. Vamos aproveitar o fato de que já descobrimos que a restrição imposta pela IS dinâmica não é ativa e escrever o problema do Banco Central nesse caso como:

$$\min_{\{x_t,\pi_t\}_{t=0}^{\infty}} \left(\frac{1}{2}\right) \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\pi_t^2 + \alpha_x x_t^2)\right] \tag{17}$$

sujeito a

$$\pi_t = \beta \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \kappa x_t + u_t \quad (i) \tag{18}$$

O Lagrangeano desse problema será:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) (\pi_t^2 + \alpha_x x_t^2) + \mu_t(\pi_t - \beta \mathbb{E}_[\pi_{t+1}] - \kappa x_t - u_t) \right\}\right] \tag{19}$$

Procedendo com a otimização, temos:

$$[\pi_t]: \quad \mathbb{E}_{t-1}\left[\beta^t \pi_t + \beta^t \mu_t + \beta^{t-1}\mu_{t-1}\beta\right] = 0 \tag{20}$$

$$[x_t]: \quad \mathbb{E}_{t-1}\left[\beta^t \alpha_x x_t - \beta^t \mu_t \kappa\right] = 0 \quad \Rightarrow \mathbb{E}_{t-1}\left[\alpha_x x_t\right] = \mathbb{E}_{t-1}\left[\mu_t \kappa\right] \tag{21}$$

Omitindo, por enquanto, o operado de esperança em t-1 e substituindo (21) em (20), temos:

$$\pi_t + \frac{\alpha_x x_t}{\kappa} - \frac{\alpha_x x_{t-1}}{\kappa} = 0 \tag{22}$$

$$\Rightarrow \pi_t = -\frac{\alpha_x}{\kappa}(x_t - x_{t-1}) \tag{23}$$

Aplicando o resultado na restrição (i):

$$-\frac{\alpha_x}{\kappa}(x_t - x_{t-1}) = \beta \mathbb{E}_t\left[-\frac{\alpha_x}{\kappa}(x_{t+1} - x_t)\right] + \kappa x_t + u_t \tag{24}$$

$$\Rightarrow x_t \underbrace{\left(-\frac{\alpha_x}{\kappa} - \frac{\beta\alpha_x}{\kappa} - \kappa\right)}_{=-\frac{\alpha_x - \beta\alpha_x - \kappa^2}{\kappa}} = -\frac{\alpha_x}{\kappa}x_{t-1} - \frac{\alpha_x \beta}{\kappa}\mathbb{E}_t[x_{t+1}] + u_t \tag{25}$$

$$\Rightarrow -x_t \left(\frac{\alpha_x(1+\beta) + \kappa^2}{\kappa}\right) = -\frac{\alpha_x}{\kappa}x_{t-1} - \frac{\alpha_x \beta}{\kappa}\mathbb{E}_t[x_{t+1}] + u_t \tag{26}$$

$$\Rightarrow x_t = \underbrace{\frac{\alpha_x}{\alpha_x(1+\beta)+\kappa^2}}_{=a} x_{t-1} + \underbrace{\frac{\alpha_x\beta}{\alpha_x(1+\beta)+\kappa^2}}_{=a\beta} \mathbb{E}_t[x_{t+1}] - \underbrace{\frac{\kappa}{\alpha_x(1+\beta)+\kappa^2}}_{\frac{\kappa a}{\alpha_x}} u_t \quad (27)$$

$$x_t = ax_{t-1} + a\beta\mathbb{E}_t[x_{t+1}] - \frac{\kappa a}{\alpha_x}u_t \quad (28)$$

Estamos no estágio em que podemos usar o método dos coeficientes indeterminados para resolver a equação acima para x_t. Notando que x_{t-1} é variável endógena escolhida no período $t-2$, nossa conjectura será apenas em cima da variável exógena u_t:

Conjectura:

$$x_t = \theta u_t \quad (29)$$

Adiantando um período e aplicando a esperança condicional a t, temos que $\mathbb{E}_t[x_{t+1}] = a\rho_u u_t$.

Substituindo na equação (28):

$$\theta u_t = a\theta u_{t-1} + a\beta\theta\rho_u u_t - \frac{\kappa a}{\alpha_x}u_t \quad (30)$$

$$\Rightarrow u_t\left(\theta - a\beta\theta\rho_u + \frac{\kappa a}{\alpha_x}\right) = a\theta u_{t-1} \quad (31)$$

$$\Rightarrow (\rho_u u_{t-1} + \varepsilon_t^u)\left(\theta - a\beta\theta\rho_u + \frac{\kappa a}{\alpha_x}\right) = a\theta u_{t-1} \quad (32)$$

$$\Rightarrow u_{t-1}\left(\theta\rho_u - a\beta\theta\rho_u^2 + \frac{\kappa a}{\alpha_x}\rho_u - a\theta\right) + \left(\theta - \alpha\beta\theta\rho_u + \frac{\kappa a}{\alpha_x}\right)\varepsilon_t^u = 0 \quad (33)$$

Considerando explicitamente a esperança condicional a $t-1$ na equação acima, ficamos apenas com:

$$u_{t-1}\left(\theta\rho_u - a\beta\theta\rho_u^2 + \frac{\kappa a}{\alpha_x}\rho_u - a\theta\right) = 0 \quad (34)$$

$$\Rightarrow \theta\rho_u - a\beta\theta\rho_u^2 + \frac{\kappa a}{\alpha_x}\rho_u - a\theta = 0 \quad (35)$$

$$\Rightarrow \theta\left(\rho_u - a\beta\rho_u^2 - a\right) = -\frac{\kappa a}{\alpha_x}\rho_u \quad (36)$$

$$\Rightarrow \theta(\rho_u(1 - a\beta\rho_u) - a) = -\frac{\kappa a}{\alpha_x}\rho_u \tag{37}$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\kappa a \rho_u}{\alpha_x}\frac{1}{(\rho_u(1 - a\beta\rho_u) - a)} \tag{38}$$

E, substituindo na conjectura (29):

$$x_t = -\frac{\kappa\rho_u}{\alpha_x(\rho_u(1 - a\beta\rho_u) - a)}u_t \tag{39}$$

Por fim, substituindo x_t da equação (39) acima na relação que obtivemos em (23):

$$\pi_t = \frac{a\rho_u}{[\rho_u(1 - a\beta\rho_u) - a]}(u_t - u_{t-1}) \tag{40}$$

Comparando com o resultado do item (a), verificamos que, sob commitment, o impacto do *cost-push shock* sobre a inflação continua sendo positivo em seu componente contemporâneo. No entanto, há uma suavização com a entrada negativa do componente do período passado. Tal resultado é reflexo do comprometimento do Banco Central com um plano pré-determinado que segue até o último período, o que alinha as expectativas dos agentes e faz com que as variáveis endógenas respondam de forma menos brusca aos eventuais choques sofridos pela economia.

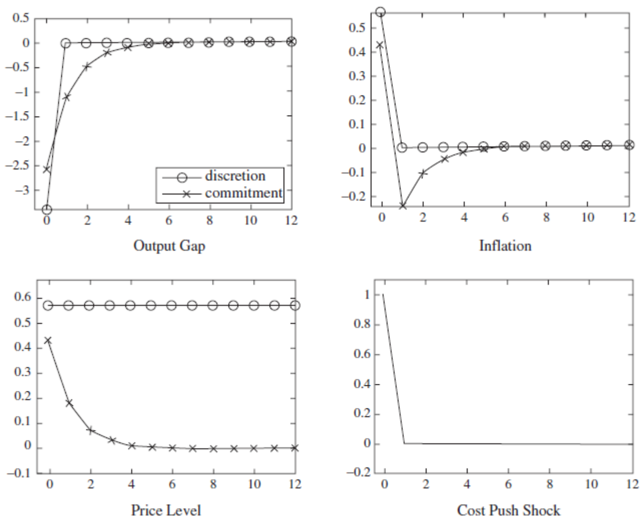

Figure 1: Ilustração da diferença da política discricionária e a de comprometimento
Fonte: Galí(1961)

Exercício 2.

(a) Vamos usar o método dos coeficientes indeterminados para resolver o modelo. Possuímos duas variáveis endógenas e apenas um choque exógeno. A taxa natural de juros é vista como um parâmetro para essa economia. Logo, conjecturamos apenas sobre ν_t:

Conjectura:

$$\tilde{y}_t = \gamma\nu_t \tag{41}$$

$$\pi_{H,t} = \theta\nu_t \tag{42}$$

Assim, como ν_t segue um processo AR(1), temos que $\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] = \gamma\rho_\nu\nu_t$ e $\mathbb{E}_t[\pi_{H,t+1}] = \theta\rho_\nu\nu_t$.

Substituindo na equação (1) do enunciado:

$$\theta\nu_t = \beta\theta\rho\nu\nu_t + \kappa_\alpha\gamma\nu_t \tag{43}$$

$$\Rightarrow \theta(1-\beta\rho_\nu) = \kappa_\alpha\gamma \tag{44}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\kappa_\alpha\gamma}{1-\beta\rho_\nu} \tag{45}$$

Subtituindo o resultado acima e a equação (3) do enunciado na IS dinâmica:

$$\gamma\nu_t = \gamma\rho_\nu\nu_t - \frac{1}{\sigma_\alpha}(\rho + \phi_\pi(\theta\nu_t) + \phi_y(\gamma\nu_t) + \nu_t - \theta\rho_\nu\nu_t - r_t^n) \tag{46}$$

$$\gamma\cancel{\nu_t} = \gamma\rho_\nu\cancel{\nu_t} - \frac{1}{\sigma_\alpha}(\cancel{\rho} + \phi_\pi(\theta\cancel{\nu_t}) + \phi_y(\gamma\cancel{\nu_t}) + \cancel{\nu_t} - \theta\rho_\nu\cancel{\nu_t} - \cancel{r_t^n}) \tag{47}$$

pois $\hat{r}_t^n = r_t^n - \rho = 0 \Rightarrow r_t^n = \rho$.

Assim,

$$\gamma = \gamma\rho_\nu - \frac{1}{\sigma_\alpha}(\phi_\pi\theta + \phi_y\gamma - \theta\rho_\nu) - \frac{1}{\sigma_\alpha} \tag{48}$$

$$\Rightarrow \gamma\left[1 - \rho_\nu + \frac{\phi_y}{\sigma_\alpha}\right] = -\frac{1}{\sigma_\alpha}\theta(\phi_\pi - \rho_\nu) - \frac{1}{\sigma_\alpha} \tag{49}$$

Substituindo (45) em (49):

$$\gamma\left[\frac{\sigma_\alpha-\sigma_\alpha\rho_\nu+\phi_y}{\sigma_\alpha}\right]=-\frac{1}{\sigma_\alpha}\frac{\kappa_\alpha\gamma}{(1-\beta\rho_\nu)}(\phi_\pi-\rho_\nu)-\frac{1}{\sigma_\alpha} \tag{50}$$

$$\Rightarrow\gamma\left[\sigma_\alpha(1-\rho_\nu)+\phi_y+\frac{\kappa_\alpha(\phi_\pi-\rho_\nu)}{(1-\beta\rho_\nu)}\right]=-1 \tag{51}$$

$$\Rightarrow\gamma\left[\frac{\phi_y(1-\beta\rho_\nu)+\sigma_\alpha(1-\rho_\nu)(1-\beta\rho_\nu)+\kappa_\alpha(\phi_\pi-\rho_\nu)}{(1-\beta\rho_\nu)}\right]=-1 \tag{52}$$

$$\Rightarrow\gamma=-\frac{(1-\beta\rho_\nu)}{(1-\beta\rho_\nu)(\sigma_\alpha(1-\rho_\nu)+\phi_y)+\kappa_\alpha(\phi_\pi-\rho_\nu)} \tag{53}$$

Assim,

$$\tilde{y}_t=-(1-\beta\rho_\nu)\Lambda_\nu\nu_t \tag{54}$$

onde

$$\Lambda_\nu\equiv\frac{1}{(1-\beta\rho_\nu)(\sigma_\alpha(1-\rho_\nu)+\phi_y)+\kappa_\alpha(\phi_\pi-\rho_\nu)} \tag{55}$$

Voltando em (45):

$$\theta=-\frac{\kappa_\alpha}{(1-\beta\rho_\nu)}(1-\beta\rho_\nu)\Lambda_\nu=-\kappa_\alpha\Lambda_\nu \tag{56}$$

E então,

$$\pi_{H,t}=-\kappa_\alpha\Lambda_\nu\nu_t \tag{57}$$

(b) Substituindo os resultados encontrados no item anterior na regra de Taylor, i.e., na equação (3) do enunciado:

$$i_t=\rho+\phi_\pi(-\kappa_\alpha\Lambda_\nu\nu_t)+\phi_y(-(1-\beta\rho_\nu)\Lambda_\nu\nu_t)+\nu_t \tag{58}$$

$$\Rightarrow i_t=\rho+\nu_t[-\phi_\pi\kappa_\alpha\Lambda_\nu-\phi_y(1-\beta\rho_\nu)\Lambda_\nu+1] \tag{59}$$

$$\Rightarrow i_t=\rho+[1-\Lambda_\nu(\phi_\pi\kappa_\alpha+\phi_y(1-\beta\rho_\nu)]\nu_t \tag{60}$$

Pela equação de Fisher sabemos que:

$$r_t=i_t-\mathbb{E}_t[\pi_{H,t+1}]=\rho+[1-\Lambda_\nu(\phi_\pi\kappa_\alpha+\phi_y(1-\beta\rho_\nu)]\nu_t-(-\kappa_\alpha\Lambda_\nu)\rho_\nu\nu_t \tag{61}$$

$$\Rightarrow r_t = \rho + \nu_t[1 - \Lambda_\nu(\phi_\pi \kappa_\alpha + \phi_y(1 - \beta\rho_\nu) + \kappa_\alpha \rho_\nu)] \tag{62}$$

Note que se $[1 - \Lambda_\nu(\phi_\pi \kappa_\alpha + \phi_y(1 - \beta\rho_\nu) + \kappa_\alpha \rho_\nu)] > 0$, então $\frac{\partial r_t}{\partial \nu_t} > 0$.

(c) Do enunciado, podemos escrever $s_t = \sigma_\alpha(y_t - y_t^*)$. Note que y_t^* é constante por hipótese de estarmos em um modelo de pequena economia aberta. Logo, redefina $y_t^* \equiv y^*$

Substituindo os resultados do item (a) na equação para s_t:

$$s_t = \sigma_\alpha[-(1 - \beta\rho_\nu)\Lambda_\nu \nu_t) - y^*] \tag{63}$$

$$\Rightarrow s_t = -\sigma_\alpha[(1 - \beta\rho_\nu)\Lambda_\nu \nu_t + y^*] \tag{64}$$

Assim, $\frac{\partial s_t}{\partial \nu_t} = -\sigma_\alpha(1 - \beta\rho_\nu) < 0$. Ou seja, um choque positivo de política monetária reduz os termos de troca.

Como $e_t = s_t - p_t^* + p_{H,t}$, então $e_t - e_{t-1} = \Delta e_t = \Delta s_t + \Delta p_{H,t}$.

$$\Rightarrow \Delta e_t = -\sigma_\alpha(1 - \beta\rho_\nu)\Lambda_\nu \nu_t - \cancel{\sigma_\alpha y^*} + \sigma_\alpha(1 - \beta\rho_\nu)\Lambda_\nu \nu_{t-1} + \cancel{\sigma_\alpha y^*} + \pi_{H,t} \tag{65}$$

$$\Rightarrow \Delta e_t = -\sigma_\alpha(1 - \beta\rho_\nu)\Lambda_\nu(\nu_t - \nu_{t-1}) - \kappa_\alpha \Lambda_\nu \nu_t \tag{66}$$

$$\Rightarrow \Delta e_t = -\sigma_\alpha(1 - \beta\rho_\nu)\Lambda_\nu \Delta\nu_t - \kappa_\alpha \Lambda_\nu \nu_t \tag{67}$$

Assim, temos que $\uparrow \nu_t \Rightarrow \downarrow \Delta e_t$. Ou seja, um choque de política monetária contracionista resulta em uma apreciação do câmbio nominal e dos termos de troca. A intuição é que uma maior taxa de juros nominal para uma pequena economia aberta deve atrair capital estrangeiro em busca de investimentos com maior retorno. Isso atrai divisas internacionais para a economia doméstica, diminuindo a escassez de tais divisias e então diminuindo seu preço relativo. A diminuição do preço relativo da divisa internacional é o mesmo que uma apreciação do preço relativo da moeda nacional, i.e., uma apreciação da taxa de câmbio nominal.