Professor: Fernando Veloso | Política Econômica - 2019
Monitor: Carlos Magno Reis | EPGE/FGV

Gabarito - 4ª Lista de Exercícios

Exercício 1

(a) Vamos resolver (1) para frente.

$$\pi_{t+1} = \beta\mathbb{E}_{t+1}[\pi_{t+2}] + \kappa\tilde{y}_{t+1} \tag{1}$$

Substituindo a equação acima em (1):

$$\pi_t = \beta^2\mathbb{E}_t[\mathbb{E}_{t+1}[\pi_{t+2}]] + \beta\kappa\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] + \kappa\tilde{y}_t \tag{2}$$

Repetindo esse procedimento até a data T:

$$\pi_t = \beta^T\mathbb{E}_t[\pi_{t+T}] + \kappa\sum_{i=0}^{T-1}\beta^i\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+i}] \tag{3}$$

Fazendo $T \to \infty$ e impondo a condição de transversalidade $\lim_{T\to\infty}\beta^T\mathbb{E}_t[\pi_{t+T}] = 0$, temos:

$$\pi_t = \kappa\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+i}] \tag{4}$$

A equação (4) nos diz que a inflação corrente, i.e., as decisões de preço tomadas pelas firmas, depende inteiramente da trajetória esperada do hiato do produto.

Agora, resolvendo (2) para um período à frente:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+2}] - \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}_t\left[(i_{t+1} - \mathbb{E}_{t+1}[\pi_{t+2}])\right] - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]) + u_t + \mathbb{E}_t[u_{t+1}] \tag{5}$$

Repetindo o processo até o periodo T:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+T}] - \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}_t\left[\sum_{j=0}^{T-1}(i_{t+j} - \mathbb{E}_{t+j}[\pi_{t+j+1}])\right] + \mathbb{E}_t\left[\sum_{j=0}^{T-1}u_{t+j}\right] \tag{6}$$

Tomando o limite com $T \to \infty$ e impondo a condição de transversalidade $\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+T}] = 0$, temos:

$$\tilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}_t[r_{t+j}] + \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}_t[u_{t+j}] \tag{7}$$

A equação acima nos diz que o hiato do produto corrente depende negativamente de toda a trajetória da taxa real de juros e positivamente dos choques futuros de demanda.

(b) Seja o vetor $x_t = \begin{pmatrix}\tilde{y}_t \\ \pi_t\end{pmatrix}$.

Substituindo a equação (3) do enunciado na equação (2) do enunciado:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(\alpha\pi_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]) + u_t \tag{8}$$

Usando (1) na equação acima:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}\left(\alpha\pi_t - \mathbb{E}_t\left[\frac{1}{\beta}(\pi_t - \kappa\tilde{y}_t)\right]\right) + u_t \tag{9}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}\left[\pi_t\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\kappa}{\beta}\tilde{y}_t\right] + u_t \tag{10}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] = \left(1 + \frac{\kappa}{\sigma\beta}\right)\tilde{y}_t + \frac{1}{\sigma}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right)\pi_t - u_t \tag{11}$$

Usando a Curva de Phillips e (11) para montar o sistema como sugerido no enunciado:

$$\begin{cases}\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] = \left(1 + \frac{\kappa}{\sigma\beta}\right)\tilde{y}_t + \frac{1}{\sigma}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right)\pi_t - u_t \\ \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] = -\frac{1}{\beta}\kappa\tilde{y}_t + \frac{1}{\beta}\pi_t\end{cases} \tag{12}$$

Então:

$$\mathbb{E}_t\begin{bmatrix}\tilde{y}_{t+1} \\ \pi_{t+1}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 + \frac{\kappa}{\sigma\beta} & \frac{1}{\sigma}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta}\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}\tilde{y}_t \\ \pi_t\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}-1 \\ 0\end{pmatrix}}_{=B}u_t \tag{13}$$

(c)

No sistema encontrado, temos duas variáveis forward-looking, $\tilde{y}_{t+1}$ e π_{t+1}. Pela condição de Blanchard-Kahn para sistemas expectacionais de equações em diferenças finitas, para unicidade e estabilidade da solução, A deve ter dois autovalores maiores do que 1 em módulo.

Para o caso específico em que $\sigma = 1$, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1+\frac{\kappa}{\beta} & \alpha - \frac{1}{\beta} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Para encontrarmos os autovalores de A, precisamos obter primeiro o polinômio característico. Os autovalores são as raízes desse polinômio. Da álgebra linear, a equação caracteristica para um vetor qualquer v é:

$$Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \tag{15}$$

A equação acima representa um sistema linear homogêneo. Para que ele possua múltiplas soluções, é preciso que:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \tag{16}$$

A condição acima é também a equação que gera o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \left(1+\frac{\kappa}{\beta} - \lambda\right) & \alpha - \frac{1}{\beta} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \left(1 + \frac{\kappa}{\beta} - \lambda\right)\left(\frac{1}{\beta} - \lambda\right) + \frac{\kappa}{\beta}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) \tag{18}$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\left(1 + \frac{\kappa}{\beta} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta} + \frac{\kappa}{\beta^2} + \frac{\alpha\kappa}{\beta} - \frac{\kappa}{\beta^2} \tag{19}$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \underbrace{1}_{=a}\lambda^2 - \left(\underbrace{1 + \frac{\kappa}{\beta} + \frac{1}{\beta}}_{=b}\right)\lambda + \underbrace{\frac{1}{\beta}(1 + \alpha\kappa)}_{=c} \tag{20}$$

As raízes do polinômio $p(\lambda)$ devem atender às seguintes condições:

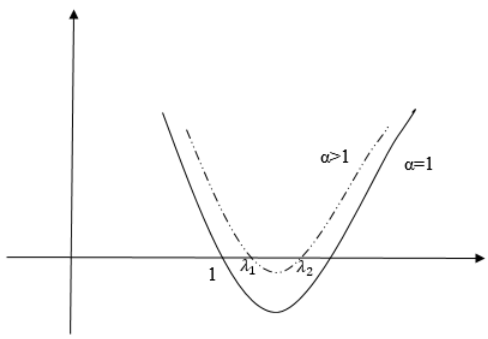
$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a} = 1 + \frac{\kappa}{\beta} + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{\kappa + 1}{\beta} \tag{21}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a} = \frac{(1 + \alpha\kappa)}{\beta} \tag{22}$$

Se $\alpha = 1 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = \frac{(1+\kappa)}{\beta}$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + \frac{1+\kappa}{\beta}$. Assim, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{1+\kappa}{\beta} > 1$, pois $\beta \in (0,1)$.

Logo, se $\alpha > 1 \Rightarrow \lambda_1^* > \lambda_2^* > 1$. E assim, A, possui dois autovalores maiores do que 1 em módulo e satisfaz as condições de unicidade e estabilidade.

Veja o gráfico abaixo para compreender melhor a intuição por trás do processo:



A condição imposta sobre α nos diz que a taxa nominal de juros deve reagir de forma mais que proporcional ao aumento da inflação para a estabilidade e unicidade do sistema. Assim, o Banco Central deve conduzir uma política monetária ativa para atingir tais objetivos. Essa condição é conhecida na literatura como Princípio de Taylor.

(d) Assumindo as hipóteses no enunciado, vamos resolver pelo método dos coeficientes indeterminados. Como já determinamos nosso sistema em (13), podemos fazer a seguinte conjectura sobre a variável exógena u_t:

Conjectura:

$$\tilde{y}_t = \gamma_y u_t \tag{23}$$

$$\pi_t = \gamma_\pi u_t \tag{24}$$

É imediato que $\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+i}] = 0$ e $\mathbb{E}_t[\pi_{t+i}] = 0$ $\forall i > 0$. Logo, das equações (1), (2) e (3) do enunciado:

$$\pi_t = \beta \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \kappa \tilde{y}_t = \kappa \tilde{y}_t \tag{25}$$

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] + \mathbb{E}_[\pi_{t+1}] - \alpha\pi_t + u_t = -\alpha\pi_t + u_t \tag{26}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_\pi u_t = \kappa \gamma_y u_t \\ \gamma_y u_t = -\alpha \gamma_\pi u_t + u_t \end{cases} \tag{27}$$

Basta resolver o sistema simples acima para obter:

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_\pi = \frac{\kappa}{1+\alpha\kappa} \\ \gamma_y = \frac{1}{\alpha\kappa+1} \end{cases} \tag{28}$$

E então:

$$\begin{cases} \tilde{y}_t = \left(\frac{1}{1+\alpha\kappa}\right) u_t \\ \pi_t = \left(\frac{\kappa}{1+\alpha\kappa}\right) u_t \end{cases} \tag{29}$$

(e) A política monetária segue uma regra de Taylor na qual α captura o quanto tal política é reativa à aumentos na inflação.

O sistema representado em (29) nos mostra que o Banco Central pode compensar choques positivos de demanda, que são inflacionários, com uma reação mais brusca da política monetária. Ou seja, aumentando a taxa de juros nominal de forma mais que proporcional ao aumento da inflação. O efeito de tal reação é duplo: o hiato do produto contemporâneo e a inflação contemporânea devem cair.

Exercício 2.

(a)

Considerando a equação (6), note que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[y^n_{t+1}] &= \mathbb{E}_t[\psi_y a_{t+1}] = \psi_y E_t[\rho_a a_t + \epsilon_{t+1}] \\ &= \psi_y \rho_a a_t = \rho_a y^n_t \end{aligned} \tag{30}$$

Logo, somando e subtraindo y^n_t do lado esquerdo da equação da IS, e fazendo o mesmo com $\rho_a y^n_t$ temos a seguinte equação em função do hiato do produto:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] - (1-\rho_a) y^n_t - \frac{1}{\sigma}(i_t + \mathbb{E}[\pi_{t+1}] - \rho) \tag{31}$$

Utilizando as equações (3) e (6) na equação acima, temos:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(\phi_\pi \pi_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]) - (1-\rho_a)\psi_y a_t \tag{32}$$

Note que $\mathbb{E}_t[a_{t+1}] = \rho_a a_t$, logo:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(\phi_\pi \pi_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]) - \psi_y a_t + \psi_y \mathbb{E}_t[a_{t+1}] \tag{33}$$

Da curva de philips, temos que:

$$\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] = \frac{\pi_t}{\beta} - \frac{\kappa}{\beta}\tilde{y}_t \tag{34}$$

Substituindo (34) em (33), temos que:

$$\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] = \left[1 + \frac{\kappa}{\sigma\beta}\right]\tilde{y}_t + \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi - \frac{1}{\beta}\pi_t\right) + \psi_y a_t - \psi_y \mathbb{E}_t[a_t + 1] \tag{35}$$

Com (35) e (34) podemos escrever o modelo no formato matricial.

$$\mathbb{E}_t \begin{bmatrix} \tilde{y}_{t+1} \\ \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + \frac{\kappa}{\alpha\beta} & \frac{1}{\sigma}(\phi_t - \frac{1}{\beta}) \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_y & -\psi_y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{bmatrix} a_t \\ \mathbb{E}_t[a_{t+1}] \end{bmatrix}}_{=u_t} \tag{36}$$

(b)

- Forward-Looking: y_t e π_t.

- Variáveis pré-determinadas: a_t.

Pelas condições de Blanchar e Kahn, o sistema terá solução única se o número de autovalores associado a matriz A fora do circulo unitário for igual ao número de variáveis *forward looking* do sistema. No caso, precisamos de dois autovalores fora do circulo unitário para garantir a unicidade da solução.
Assumindo $\sigma = 1$ temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\kappa}{\beta} & \phi_\pi - \frac{1}{\beta} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \tag{37}$$

Logo, temos o seguinte polinômio característico:

$$\lambda^2 - \left[\frac{1}{\beta} + 1 + \frac{\kappa}{\beta}\right]\lambda + \left[\frac{1}{\beta} + \frac{\kappa\phi_\pi}{\beta}\right] = 0 \tag{38}$$

Conforme resolução do exercício anterior, temos que se $\phi_p i = 1$, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 > 1$.
Logo, para $\phi_\pi > 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 1$.
Portanto, para que o modelo tenha solução única, $\phi_\pi > 1$.

(c)

Seguindo a dica, dizemos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_t &= Aa_t \\
\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] &= A\mathbb{E}_t[a_{t+1}] \\
\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] &= Aa_t\rho_a \\
\mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] &= \tilde{y}_t\rho_a
\end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned}
\pi_t &= Ba_t \\
\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] &= B\mathbb{E}_t[a_{t+1}] \\
\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] &= Ba_t\rho_a \\
\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] &= \pi_t\rho_a
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{y}_t = Aa_t \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_t[\tilde{y}_{t+1}] = Aa_t\rho_a \tag{39}$$

$$\pi_t = Ba_t \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] = Ba_t\rho_a. \tag{40}$$

Logo, a equação IS e a curva de phillips ficam, respectivamente:

$$(1-\beta\rho_a)Ba_t = \kappa A a_t \tag{41}$$

$$(1-\rho_a)Aa_t = -\psi_y(1-\rho_a)a_t - \frac{1}{\sigma}(\phi_\pi - \rho_a)Ba_t \tag{42}$$

Substituindo (41) na (42), temos que:

$$A = \frac{-\psi_y}{1 + \frac{(\phi_\pi - \rho_a)\kappa}{\sigma(1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)}} < 0 \tag{43}$$

$$B = \frac{-\psi_y}{\frac{(1-\beta\rho_a)}{\kappa} + \frac{(\phi_\pi - \rho_a)}{\sigma(1-\rho_a)}} < 0 \tag{44}$$

Logo, quanto maior o meu nível tecnológico, menor será a minha inflação e o hiato do produto.
Sabendo que $y_t = \tilde{y}_t + y_t^n$, temos que:

$$y_t = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{(\phi_\pi - \rho_a)\kappa}{\sigma(1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)}}\right)\psi_y a_t > 0 \tag{45}$$

Logo,

$$y_t = \left(\frac{\frac{(\phi_\pi - \rho_a)\kappa}{\sigma(1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)}}{1 + \frac{(\phi_\pi - \rho_a)\kappa}{\sigma(1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)}}\right)\psi_y a_t > 0 \tag{46}$$

E pela equação (4) do enunciado, temos que:

$$n_t = \left\{\left(\frac{\frac{(\phi_\pi - \rho_a)\kappa}{\sigma(1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)}}{1 + \frac{(\phi_\pi - \rho_a)\kappa}{\sigma(1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)}}\right)\psi_y - 1\right\} a_t \tag{47}$$

Logo o produto reage positivamente ao crescimento tecnológico da economia, enquanto o trabalho depende da magnitude do parâmetro ψ_y. Por outro lado a inflação reage de forma negativa. Note então que, por este modelo, a inflação pode ser reduzida através de melhorias tecnológicas na economia.

(d)

Analisando a equação (45) percebe-se que quanto mais reativa a política monetária for, mais próximo a economia estará do seu nível de pleno emprego, pois:

$$\underset{\phi_\pi \to \infty}{Lim}\, y_t = \psi_y a_t = y^n \tag{48}$$

Enquanto a produtividade do trabalho:

$$\underset{\phi_\pi \to \infty}{Lim}\, n_t = (\psi_y - 1)a_t \tag{49}$$

E a inflação tende a zero, pela equação (44):

$$\underset{\phi_\pi \to \infty}{Lim}\, \pi_t = 0. \tag{50}$$

O Banco Central ao aumentar o nível de reação a inflação, abre mão de uma produtividade do trabalho e produto maiores. É exatamente a ideia da curva de phillips, o trade off entre uma economia com crescimento maior e uma economia com baixa inflação.