Gabarito - 3ª Lista de Exercícios

- Competição perfeita.
- Preços flexíveis em todos os mercados.

Exercício 1.

(a) Note que existe uma restrição orçamentária para cada t. Assim, teremos uma sequência em t de multiplicadores de Lagrange. O Lagrangeano do problema é dado por:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ u(C_t, N_t) + \lambda_t (B_{t-1} + W_t N_t - T_t - P_t C_t - Q_t B_t) \right\} \right] \tag{1}$$

Como explícito no problema, o agente escolhe as variáveis C_t, N_t e B_t. Assim, as condições de primeira ordem são:

$$[C_t]: \quad \beta^t u_C(t) + \lambda_t(-P_t)\beta^t = 0, \quad \forall t \tag{2}$$

$$[N_t]: \quad \beta^t u_N(t) + \beta^t \lambda_t W_t = 0, \quad \forall t \tag{3}$$

$$[B_t]: \quad \beta^{t+1} \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}] - \beta^t \lambda_t Q_t = 0, \quad \forall t \tag{4}$$

Onde, acima, consideramos a notação $u_X(t) = \frac{\partial u(C_t,N_t)}{\partial X_t}$.

Reorganizando (2), ficamos com:

$$\lambda_t = \frac{u_C(t)}{P_t} \tag{5}$$

E podemos interpretar o multiplicador de Lagrange da restrição orçamentária como o valor real da utilidade marginal do consumo.
Reorganizando (3), temos:

$$\frac{u_N(t)}{W_t} = -\lambda_t \tag{6}$$

E de (5) e (6) ficamos com:

$$\frac{u_N(t)}{u_C(t)} = -\frac{W_t}{P_t} \tag{7}$$

Que é a equação que representa a taxa marginal de substituição entre consumo e trabalho. Como $u_C(\cdot) > 0$ e $u_N(\cdot) < 0$, a razão do lado direito é positiva e denota o quanto o agente precisa ganhar, na margem, de consumo real, para reduzir na margem sua oferta de trabalho.

De (4) e (5), podemos obter:

$$\lambda_t Q_t = \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}]\beta \Rightarrow Q_t \frac{u_C(t)}{P_t} = \mathbb{E}_t\left[\frac{u_C(t+1)}{P_{t+1}}\right]\beta \tag{8}$$

Tal equação é conhecida como equação de Euler do consumo e podemos rearranjá-la novamente:

$$\frac{u_C(t)}{P_t} Q_t = \beta \mathbb{E}_t\left[\frac{u_C(t+1)}{P_{t+1}}\right] \tag{9}$$

Como toda poupança no presente significa abrir mão de consumo também no presente, a equação acima nos diz que o agente abre mão de consumir comprando títulos até o ponto em qua sua utilidade marginal do consumo em t se iguala ao valor presente da utilidade marginal do consumo em $t+1$. Tal equação também é uma equação de precificação de ativos, que, nesse caso, precifica o ativo de renda fixa B_t.

(b) Usando a função de utilidade do enunciado, temos que:

$$u_C(t) = C_t^{-\sigma} \quad \text{e} \quad u_N(t) = -N_t^{\varphi} \tag{10}$$

De (7), temos que:

$$\frac{N_t^{\varphi}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t} \tag{11}$$

Tomando o logaritmo, temos

$$\varphi \ln N_t - (-\sigma) \ln C_t = \ln W_t - \ln P_t \tag{12}$$

E, aplicando a notação do enunciado:

$$\varphi n_t + \sigma c_t = w_t - p_t \tag{13}$$

Agora, aplicando o logaritmo natural em (8),

$$\ln Q_t = \ln \beta + \mathbb{E}_t \left[-\sigma(\ln C_{t+1} - \ln C_t) + \ln P_t - \ln P_{t+1} \right] \tag{14}$$

Como $\ln Pt - \ln P_{t+1} = -\pi_{t+1}$, $\ln \beta = -\rho$ e $\ln Q_t = -i_t$, temos que:

$$c_t = \mathbb{E}_t[c_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] - \rho) \tag{15}$$

As equações (13) e (15) são as equações linearizadas que caracterizam as condições de primeira ordem do problema do consumidor.

(c) O problema dinâmico da firma é:

$$\max_{N_t} P_t Y_t - W_t N_t \Leftrightarrow \max_{N_t} P_t A_t N_t^{1-\alpha} - W_t N_t \tag{16}$$

As C.P.O. desse problema é:

$$[N_t] : P_t A_t (1-\alpha) N_t^{-\alpha} - W_t = 0 \quad \Rightarrow \quad N_t = \left(\frac{W_t}{P_t A_t (1-\alpha)} \right)^{\frac{-1}{\alpha}} \tag{17}$$

Log-linearizando o resultado acima,

$$\ln N_t = \frac{-1}{\alpha}[\ln W_t - (\ln P_t + \ln A_t + \ln(1-\alpha))] \tag{18}$$

e então,

$$w_t - p_t = -\alpha n_t + a_t + \ln(1-\alpha) \tag{19}$$

(d) Vamos primeiramente log-linearizar a função de produção $Y_t = A_t N_t^{(1-\alpha)}$:

$$\ln Y_t = \ln A_t + (1-\alpha) \ln N_t \quad \Rightarrow \quad y_t = a_t + (1-\alpha) n_t \tag{20}$$

Agora, aplicando a condição de equilíbrio no mercado de bens na equação (13):

$$w_t - p_t = \sigma y_t + \varphi n_t \tag{21}$$

Combinando a equação acima com a equação (19):

$$a_t - \alpha n_t + \ln(1-\alpha) = \sigma y_t + \varphi n_t \tag{22}$$

E, aplicando a equação (20),

$$a_t + \ln(1-\alpha) = \sigma(a_t + (1-\alpha)n_t) + (\varphi + \alpha) n_t \tag{23}$$

o que implica que:

$$n_t = \psi_{n,a} a_t + \nu_n \tag{24}$$

onde $\psi_{n,a} \equiv \frac{1-\sigma}{\varphi+\alpha+\sigma(1-\alpha)}$ e $\nu_n \equiv \frac{\ln(1-\alpha)}{\varphi+\alpha+\sigma(1-\alpha)}$

Substituindo na função de produção, podemos encontrar o produto de equilíbrio:

$$y_t = a_t + (1-\alpha)(\psi_{n,a} a_t + \nu_t) = a_t(1 + \psi_{n,a}(1-\alpha)) + (1-\alpha)\nu_n \tag{25}$$

Definindo $\psi_{y,a} \equiv 1 + \psi_{n,a}(1-\alpha)$ e $\nu_y \equiv (1-\alpha)\nu_n$, ficamos com:

$$y_t = \psi_{y,a} a_t + \nu_y \tag{26}$$

(e) A partir da equação de Euler linearizada e, aplicando o equilíbrio no mercado de bens, temos:

$$y_t = \mathbb{E}_t[y_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] - \rho) \tag{27}$$

Usando a definição do enunciado para taxa real de juros, rearranjamos a equação acima para:

$$r_t - \rho = -\sigma(y_t - \mathbb{E}_t[y_{t+1}]) \quad \Rightarrow \quad r_t = \sigma \mathbb{E}_t[\Delta y_{t+1}] + \rho \tag{28}$$

Da equação (26), observamos que:

$$\Delta y_{t+1} = y_{t+1} - y_t = \psi_{y,a} a_{t+1} + \nu_y - \psi_{y,a} a_t + \nu_y = \psi_{y,a}(a_{t+1} - a_t) \tag{29}$$

$$\Rightarrow \Delta y_{t+1} = \psi_{y,a} \Delta a_{t+1} \tag{30}$$

Assim, aplicando o resultado acima em (28):

$$r_t = \rho + \psi_{y,a} \sigma \mathbb{E}_t[\Delta a_{t+1}] \tag{31}$$

E, notamos que a taxa de juros real de equilíbrio depende dos parâmetros estruturais do modelo e do processo exógeno para a_t.

(f) O salário real linearizado é dado por $w_t - p_t = \omega_t$. Voltando em (19), e aplicando n_t de equilíbrio:

$$\omega_t = a_t - \alpha(\psi_{n,a} a_t + \nu_n) + \ln(1-\alpha) \tag{32}$$

$$\Rightarrow \omega_t = \underbrace{(1-\alpha\psi_{n,a})}_{=\psi_{\omega,a}} a_t + \underbrace{\ln(1-\alpha) - \alpha\nu_n}_{\nu_\omega} \tag{33}$$

$$\Rightarrow \omega_t = \psi_{\omega,a} a_t + \nu_\omega \tag{34}$$

(g) Note que as variáveis reais, produto, emprego e salário real dependem apenas do nível de produtividade, a_t. A moeda não influencia essas variáveis, indicando que a moeda e a política monetária são neutras.

Exercício 2.

- $S_t = M_t + B_t$
- $Q_t = \frac{1}{(1+i_t)} \Rightarrow -ln(Q_t) = ln(1+i_t) \approx i_t$

(a) Reescrevendo a restrição orçamentária do problema em termos reais:

$$C_t + \frac{Q_t}{P_t} S_{t+1} + (1-Q_t)\frac{M_t}{P_t} \leq \frac{S_t}{P_t} + \frac{W_t}{P_t} N_t - \frac{T_t}{P_t} \tag{35}$$

O Lagrangeano do problema é dado por:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ u(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t) + \lambda_t \left(\frac{S_t}{P_t} + \frac{W_t}{P_t} N_t - \frac{T_t}{P_t} - C_t - \frac{Q_t}{P_t} S_{t+1} - (1-Q_t)\frac{M_t}{P_t} \right) \right\} \right] \tag{36}$$

C.P.O.s:

$$[C_t]: \quad \beta^t u_C(t) - \beta^t \lambda_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_t = u_C(t) \tag{37}$$

$$\left[\frac{M_t}{P_t}\right]: \quad \beta^t u_M(t) - \beta^t \lambda_t (1-Q_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_M(t) = \lambda_t (1-Q_t) \tag{38}$$

$$[N_t]: \quad \beta^t u_N(t) + \beta^t \lambda_t \frac{W_t}{P_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_N(t) = -\lambda_t \frac{W_t}{P_t} \tag{39}$$

$$[S_{t+1}]: \quad \mathbb{E}_t \left[\beta^{t+1} \lambda_{t+1} \frac{1}{P_{t+1}} \right] - \beta^t \lambda_t \frac{Q_t}{P_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_t Q_t = \beta \mathbb{E}_t \left[\lambda_{t+1} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \tag{40}$$

Substituindo o resultado de (37) em (38):

$$\frac{u_M(t)}{u_C(t)} = (1 - Q_t) = 1 - \exp(i_t) = i_t \tag{41}$$

(37) em (39):

$$\frac{u_N(t)}{u_C(t)} = -\frac{W_t}{P_t} \tag{42}$$

(37) em (40):

$$u_C(t) = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{u_C(t+1)}{Q_t} \frac{p_t}{p_{t+1}} \right] \tag{43}$$

(b) O problema dinâmico da firma é:

$$\max_{N_t} P_t Y_t - W_t N_t \Leftrightarrow \max_{N_t} P_t A_t N_t^{1-\alpha} - W_t N_t \tag{44}$$

As C.P.O. desse problema é:

$$[N_t] : P_t A_t (1-\alpha) N_t^{-\alpha} - W_t = 0 \quad \Rightarrow \frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha) A_t N_t^{-\alpha} \tag{45}$$

Log-linearizando o resultado acima,

$$\ln W_t - \ln P_t = \ln(1-\alpha) + \ln A_t - \alpha \ln N_t \tag{46}$$

No steady-state, as variáveis não mudam de valor com o tempo, i.e., $X_t = X_{t+1} = \ldots = X_{t+n} = X, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, no steady-state, teremos que a equação (45) fica:

$$\frac{W}{P} = (1-\alpha) A N^{-\alpha} \tag{47}$$

E, log-linearizando o resultado acima,

$$\ln W - \ln P = \ln(1-\alpha) + \ln A - \alpha \ln N \tag{48}$$

A equação em termos de desvios logarítmicos do steady-state é obtida subtraindo (48) de (46):

$$\underbrace{\ln W_t - \ln W}_{=\hat{w}_t} - \underbrace{\ln P_t - \ln P}_{=\hat{p}_t} = \ln(1-\alpha) - \ln(1-\alpha) + \underbrace{\ln A_t - \ln A}_{=\hat{a}_t} - \alpha \underbrace{\ln N_t - \ln N}_{=\hat{n}_t} \tag{49}$$

$$\Rightarrow \hat{w}_t - \hat{p}_t = \hat{a}_t - \alpha \hat{n}_t \tag{50}$$

(c) Utilizando a função sugerida no enunciado:

$$u_C(t) = \left(C_t \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \frac{M_t}{P_t} \tag{51}$$

$$u_M(t) = \left(C_t \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t \tag{52}$$

$$u_N(t) = -N_t^{\varphi} \tag{53}$$

Aplicando nas relações encontradas no item (a):

$$\frac{\left(C_t \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t}{\left(C_t \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \frac{M_t}{P_t}} = (1 - Q_t) \quad \Rightarrow \quad C_t = \frac{M_t}{P_t}(1 - Q_t) \tag{54}$$

E, log-linearizando:

$$\ln C_t = \ln M_t - \ln P_t + \ln i_t \tag{55}$$

No steady-state:

$$\ln C = \ln M - \ln P + \ln i \tag{56}$$

Fazendo a substração (56) em (55):

$$\hat{c}_t = \hat{m}_t - \hat{p}_t + \hat{i}_t \tag{57}$$

Agora, em (42):

$$\frac{-N_t^{\varphi}}{\left(C_t \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \frac{M_t}{P_t}} = -\frac{W_t}{P_t} \quad \Rightarrow \quad N_t^{\varphi} C_t^{\sigma} \left(\frac{P_t}{M_t}\right)^{1-\sigma} = \frac{W_t}{P_t} \tag{58}$$

Log-linearizando,

$$\varphi \ln N_t + \sigma \ln C_t + (1 - \sigma) \ln P_t - (1 - \sigma) \ln M_t = \ln W_t - \ln P_t \tag{59}$$

Fazendo o mesmo procedimento com a avaliação no steady-state a subtração das duas equações:

$$\varphi \hat{n}_t + \sigma \hat{c}_t + (1 - \sigma)\hat{p}_t - (1 - \sigma)\hat{m}_t = \hat{w}_t - \hat{p}_t \tag{60}$$

Agora, aplicando na equação de Euler do consumo em (43):

$$Q_t = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\left(C_{t+1}\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}\right)^{-\sigma} \frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}}{\left(C_t\frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \frac{M_t}{P_t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \tag{61}$$

$$\Rightarrow Q_t C_t^{-\sigma} \left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{1-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left[C_{t+1}^{-\sigma} \left(\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}\right)^{1-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \tag{62}$$

Log-linearizando:

$$\begin{aligned} \ln Q_t - \sigma \ln C_t + (1-\sigma)[\ln M_t - \ln P_t] \quad = \quad & \ln \beta - \sigma \mathbb{E}_t[\ln C_{t+1}] + \\ & (1-\sigma)[\mathbb{E}_t[\ln M_{t+1}] - \mathbb{E}_t[\ln P_{t+1}]] \\ & + \ln P_t - \mathbb{E}_t[\ln P_{t+1}] \end{aligned} \tag{63}$$

Fazendo a usual avaliação no steady-state, substraindo e considerando que $\ln Q_t - \ln Q = -\hat{i}_t$, temos:

$$-\hat{i}_t - \sigma \hat{c}_t + (1-\sigma)(\hat{m}_t - \hat{p}_t) = -\sigma \mathbb{E}_t[\hat{c}_{t+1}] + (1-\sigma)(\mathbb{E}_t[\hat{m}_{t+1}] - \mathbb{E}_{t+1}[\hat{p_{t+1}}]) + \hat{p}_t - \mathbb{E}_t[\hat{p}_{t+1}] \tag{64}$$

$$\Rightarrow \hat{c}_t = \mathbb{E}_t[\hat{c}_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(\hat{i}_t + (1-\sigma)(\mathbb{E}_t[\Delta \hat{m}_{t+1}] - \mathbb{E}_t[\Delta \hat{p}_{t+1}]) - \mathbb{E}_t[\hat{\pi}_{t+1}]) \tag{65}$$

(d) Vamos usar:

$$\Rightarrow \hat{w}_t - \hat{p}_t = \hat{a}_t - \alpha \hat{n}_t \tag{66}$$

e

$$\varphi \hat{n}_t + \sigma \hat{c}_t - (1-\sigma)(\hat{m}_t - \hat{p}_t) = \hat{w}_t - \hat{p}_t \tag{67}$$

Logo,

$$\varphi \hat{n}_t + \sigma \hat{c}_t - (1-\sigma)(\hat{m}_t - \hat{p}_t) = \hat{a}_t - \alpha \hat{n}_t \tag{68}$$

Equilíbrio no mercado de bens implica que $\hat{c}_t = \hat{y}_t$. Além disso, a função de produção em desvios logarítmicos do steady-state é:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t \tag{69}$$

Fazendo as substituições, (68) fica:

$$\varphi\hat{n}_t + \sigma(\hat{y}_t) - (1-\sigma)(\hat{m}_t - \hat{p}_t) = \hat{a}_t - \alpha\hat{n}_t \tag{70}$$

Logo $\hat{n}_t$:

$$\hat{n}_t(\varphi + \alpha) = \hat{a}_t - \sigma\hat{y}_t + (1-\sigma)(\hat{m}_t - \hat{p}_t) \tag{71}$$

Aplicando isso na equação (69), temos:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + (1-\alpha)\left[\frac{\hat{a}_t}{(\varphi+\alpha)} - \frac{\sigma}{(\varphi+\alpha)}\hat{y}_t + \frac{(1-\sigma)(\hat{m}_t - \hat{p}_t)}{(\varphi+\alpha)}\right] \tag{72}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_t = \frac{(1+\varphi)}{(\varphi+\alpha+(1-\alpha)\sigma)}\hat{a}_t + \frac{(1-\sigma)(1-\alpha)(\hat{m}_t - \hat{p}_t)}{(\varphi+\alpha+(1-\alpha)\sigma)} \tag{73}$$

Note pela equação acima que os encaixes reais afetam diretamente o produto da economia em equilíbrio. Logo, dizemos que a política monetária é não neutra.