Professor: Fernando Veloso | Política Econômica - 2019
Monitor: Carlos Magno Reis | EPGE/FGV

Gabarito - 2ª Lista de Exercícios

Exercício 1

- Use as simplificações, $v_t = 0$, $\mathbb{E}_{t-1}[m_t] = 0$ e que $\mathbb{E}_{t-1}[u_t] = 0$.

(a) Do enunciado, substituindo (5) em (2):

$$y_t^s = \beta \left[(p_t - \mathbb{E}_{t-1}[p_t]) + \left(\frac{\alpha\gamma}{\delta + \gamma} \right) \mathbb{E}_{t-1}[u_t] - \lambda(p_t - \mathbb{E}_{t-1}[p_t] + u_t) \right] \tag{1}$$

Defina: $a \equiv \left(\frac{\alpha\gamma}{\delta+\gamma}\right)$. Assim, temos:

$$y_t^s = \beta(1 - \lambda)(p_t - \mathbb{E}_{t-1}[p_t]) + \beta(u_t - a\mathbb{E}_{t-1}[u_t]) \tag{2}$$

Agora, aplicando a hipótese simplificadora de que $\mathbb{E}_{t-1}[u_t] = 0$, temos que:

$$y_t^s = \beta(1 - \lambda)(p_t - \mathbb{E}_{t-1}[p_t]) + \beta u_t \tag{3}$$

Aplicando $v_t = 0$ em (1),

$$y_t^d = m_t - p_t \tag{4}$$

Agora podemos usar as equações (3) e (4) acima para caracterizar o equilíbrio no mercado de bens:

$$y_t^d = y_t^s = y_t \tag{5}$$

Logo,

$$m_t - p_t = y_t^s = \beta(1 - \lambda)(p_t - \mathbb{E}_{t-1}[p_t]) + \beta u_t \tag{6}$$

$$\Rightarrow p_t = m_t - \beta(1 - \lambda)(p_t - \mathbb{E}_{t-1}[p_t]) - \beta u_t \tag{7}$$

Portanto:

$$\mathbb{E}_{t-1}[p_t] = \mathbb{E}_{t-1}[m_t] - \beta(1 - a)\mathbb{E}_{t-1}[u_t].$$

$$\mathbb{E}_{t-1}[p_t] = 0 \tag{8}$$

Aplicando a equação (1) do enunciado e (8) em (1).

$$y_t^s = \beta \left[(1-\lambda)\left[m_t - y_t^d\right] + u\right] \tag{9}$$

Por (6), temos que:

$$y_t = \frac{\beta}{[1+\beta(1-\lambda)]}\left[(1-\lambda)m_t + u_t\right] \tag{10}$$

Novamente, por (1) do enunciado, encontramos o nível de preço de equilíbrio.

$$p_t = \frac{1}{[1+\beta(1-\lambda)]}[m_t - \beta u_t] \tag{11}$$

(b) O enunciado pede o impacto do aumento do grau de indexação λ no impacto de u_t e m_t no preço de equilíbrio. Sabemos que o impacto de u_t em p_t corresponde a $\dfrac{\partial p_t}{\partial u_t}$ e que, analogamente, o impacto de m_t em p_t corresponde a $\dfrac{\partial p_t}{\partial m_t}$

Dessa forma, para obtermos o efeito do aumento do grau de indexação nesses impactos, basta fazer a derivada desses efeitos com relação a λ, i.e., $\dfrac{\partial p_t}{\partial u_t \partial \lambda}$ e $\dfrac{\partial p_t}{\partial m_t \partial \lambda}$.

Derivando (11),

$$\frac{\partial p_t}{\partial m_t} = \frac{1}{1+\beta(1-\lambda)} > 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial u_t} = \frac{-\beta}{1+\beta(1-\lambda)} < 0 \tag{13}$$

E então,

$$\frac{\partial p_t}{\partial m_t \partial \lambda} = \frac{(-1)(-\beta)}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} = \frac{\beta}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} > 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial u_t \partial \lambda} = \frac{(\beta)(-\beta)}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} = \frac{-\beta^2}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} < 0 \tag{15}$$

A intuição dos resultados acima é que, quanto maior o grau de indexação, maior será o impacto de choques monetários e choques de oferta no preço de equilíbrio, pois maior será o repasse nos preços advindo dos salários no equilíbrio do mercado de bens. Note que quanto maior λ, maior o efeito do choque monetário no preço da economia, por outro lado, quanto maior λ, o efeito negativo do choque de oferta no preço é cada vez maior.

(c) De forma análoga ao exercicio anterior, temos que, de (10):

$$\frac{\partial y_t}{\partial m_t} = \frac{\beta(1-\lambda)}{1+\beta(1-\lambda)} > 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial u_t} = \frac{\beta}{1+\beta(1-\lambda)} > 0 \tag{17}$$

E então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_t}{\partial m_t \partial \lambda} &= \frac{(-\beta)(1+\beta(1-\lambda)) - [-\beta(\beta(1-\lambda))]}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} = \frac{-\beta-\beta^2(1-\lambda)+\beta^2(1-\lambda)}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} \\ &= \frac{-\beta}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} < 0\end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial u_t \partial \lambda} = \frac{-(\beta)(-\beta)}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} = \frac{\beta^2}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} > 0 \tag{19}$$

Assim, quanto maior a indexação, menor a sensibilidade de y_t aos choques monetários e maior sua sensibilidade aos choques de oferta. Por um lado, quanto maior o λ, menor a possibilidade de ajuste no salário real diante de choques de oferta, o que amplifica o efeito desses choques no emprego e, consequentemente, no produto. No entanto, por outro lado, quanto maior o λ, menor o efeito de choques monetários no salário real, pois os agentes antecipam a mudança de preços, o que reduz o impacto de tais choques no emprego e no produto.

Exercício 2

(a) Deve-se encontrar x_t em função de $\mathbb{E}_t[x_{t+1}]$, da variável conhecida em t, x_{t-1} e das variáveis exógenas ao modelo, (v_t, e_t). Substituindo a equação (3) do enunciado na equação (1):

$$x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1}]) + \gamma(\beta_0 + \beta_1(m_t - p_t) + \nu_t) \tag{20}$$

Substituindo (2) na equação acima:

$$x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1}]) + \gamma\left(\beta_0 + \beta_1\left(m_t - \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1})\right) + \nu_t\right) \tag{21}$$

Agora (4) em (21);

$$x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1}]) + \gamma\left(\beta_0 + \beta_1\left(\mu + e_t - \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1})\right) + \nu_t\right) \tag{22}$$

Multiplicando a equação cima por 2 e rearranjando os termos, temos:

$$x_t = \frac{2\gamma(\beta_0 + \beta_1\mu)}{2+\gamma\beta_1} + \frac{(1-\gamma\beta_1)}{2+\gamma\beta_1}x_{t-1} + \frac{1}{1+\gamma\beta_1}\mathbb{E}_t[x_{t+1}] + \frac{2\gamma\beta_1}{2+\gamma\beta_1}e_t + \frac{2\gamma}{2+\gamma\beta_1}\nu_t \tag{23}$$

Temos uma equação em diferenças finitas expectacional estocástica. Queremos eliminar o componente forward-looking de x_t. Para isso, podemos usar o método dos coeficientes indeterminados.

Conjectura:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3 \nu_t \tag{24}$$

Vale a pena notar, que existe um componente defasado de x_t em (23). Como esse componente não é forward-looking e não possui o operador esperança indicando esse fato, ele deve ser adicionado como variável de estado, e, portanto, entra na nossa conjectura de forma linear como as outras variáveis.

Adiantando a equação (24) em 1 período e aplicando a esperança condicional ao tempo t,

$$\mathbb{E}_t[x_{t+1}] = \phi_0 + \phi_1 \underbrace{\mathbb{E}_t[x_t]}_{=x_t} + \phi_2 \underbrace{\mathbb{E}_t[e_{t+1}]}_{=0} + \phi_3 \underbrace{\mathbb{E}_t[\nu_{t+1}]}_{=0} \tag{25}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_t[x_{t+1}] = \phi_0 + \phi_1 x_t \tag{26}$$

Substituindo a conjectura em (24) na equação acima:

$$\mathbb{E}_t[x_{t+1}] = \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3 \nu_t) = \phi_0 + \phi_0\phi_1 + \phi_1^2 x_{t-1} + \phi_1\phi_2 e_t + \phi_1\phi_3\nu_t \tag{27}$$

Substituindo (24) e (27) em (23):

$$\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3 \nu_t = \frac{2\gamma(\beta_0 + \beta_1\mu) + \phi_0(1+\phi_1)}{2+\gamma\beta_1} + \frac{(1-\gamma\beta_1+\phi_1^2)}{2+\gamma\beta_1}x_{t-1} + $$
$$+ \frac{(2\gamma\beta_1 + \phi_1\phi_2)}{2+\gamma\beta_1}e_t + \frac{2\gamma + \phi_1\phi_3}{2+\gamma\beta_1}\nu_t \tag{28}$$

Comparando os coeficientes:

$$\phi_0 = \frac{2\gamma(\beta_0 + \beta_1\mu) + \phi_0(1+\phi_1)}{2+\gamma\beta_1} \Rightarrow \phi_0 = \frac{2\gamma(\beta_0+\beta_1\mu)}{2+\gamma\beta_1 - 1 - \phi_1} \tag{29}$$

$$\phi_1 = \frac{(1-\gamma\beta_1+\phi_1^2)}{2+\gamma\beta_1} \tag{30}$$

$$\phi_2 = \frac{(2\gamma\beta_1 + \phi_1\phi_2)}{2+\gamma\beta_1} \Rightarrow \phi_2 = \frac{2\gamma\beta_1}{2+\gamma\beta_1-\phi_1} \tag{31}$$

$$\phi_3 = \frac{2\gamma + \phi_1\phi_3}{2+\gamma\beta_1} \Rightarrow \phi_3 = \frac{2\gamma}{2+\gamma\beta_1-\phi_1} \tag{32}$$

Em que deixamos todos os coeficientes em função de ϕ_1, pois a sua equação inclui um termos quadrático que iremos resolver agora. De (30), temos que:

$$\phi_1^2 - (2+\gamma\beta_1)\phi_1 + (1-\gamma\beta_1) = 0 \tag{33}$$

Do método para resoluções de equações de segundo grau,

$$\Delta = (2+\gamma\beta_1)^2 - 4(1)(1-\gamma\beta_1) = 4 + 4\gamma\beta_1 + (\gamma\beta_1)^2 - 4 + 4\gamma\beta_1 = (\gamma\beta_1)^2 + 8\gamma\beta_1 \tag{34}$$

Notando que $(\gamma\beta_1 + 4)^2 = (\gamma\beta_1)^2 + 8\gamma\beta_1 + 4^2 \Rightarrow (\gamma\beta_1)^2 + 8\gamma\beta_1 = (\gamma\beta_1+4)^2 - 4^2$, podemos verificar que:

$$\phi_1 = \frac{2+\gamma\beta_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2+\gamma\beta_1 \pm \sqrt{(\gamma\beta_1+4)^2 - 4^2}}{2} \tag{35}$$

Assim,

$$\phi_1' = 1 + \frac{\gamma\beta_1}{2} + \frac{\sqrt{(\gamma\beta_1+4)^2-4^2}}{2} > 1 \tag{36}$$

e

$$\phi_1'' = 1 + \frac{\gamma\beta_1}{2} - \frac{\sqrt{(\gamma\beta_1 + 4)^2 - 4^2}}{2} < 1 \tag{37}$$

Como o ϕ_1 da nossa conjectura é justamente o parâmetro que antecede a variável x_{t-1}, é ele quem garante a estabilidade ou não da equação em diferenças finitas representada em (24). Por razões que não demonstraremos aqui, necessitamos, para a estabilidade, que, $|\phi_1| < 1$. Logo, iremos escolher $\phi_1 = \phi_1''$ como a solução adequada.

Assim, basta substituir o ϕ_1 que encontramos nas equações (29), (31) e (32) e temos os coeficientes que solucionam o problema do contrato salarial de equilíbrio:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3 \nu_t \tag{38}$$

(b) Basta usar a equação (38) do item anterior e substituir em (2), para obtermos o preço de equilíbrio:

$$p_t = \frac{1}{2}\{\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3 \nu_t + \phi_0 + \phi_1 x_{t-2} + \phi_2 e_{t-1} + \phi_3 \nu_{t-1}\} \tag{39}$$

Rerrajando,

$$p_t = \phi_0 + \phi_1 \underbrace{\frac{1}{2}(x_{t-1} + x_{t-2})}_{=p_{t-1}} + \phi_2 \frac{1}{2}(e_t + e_{t-1}) + \phi_3(\nu_t + \nu_{t-1}) \tag{40}$$

Logo,

$$p_t = \phi_0 + \phi_1 p_{t-1} + \frac{\phi_2}{2}(e_t + e_{t-1}) + \frac{\phi_3}{2}(\nu_t + \nu_{t-1}) \tag{41}$$

A intuição econômica do resultado que encontramos na equação (41) é a de que, em um modelo com contratos justapostos de Taylor, o nível de preços possui um componente inercial, i.e., depende do nível de preços passado. Essa inércia advém diretamente da inércia dos contratos salariais sob a qual o modelo está definido.

(c) A curva de Phillips relaciona a variação na inflação com o hiato do produto. Da equação (1) do enunciado,

$$x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1}]) + \gamma y_t \tag{42}$$

$$\Rightarrow x_{t-1} = \frac{1}{2}(x_{t-2} + \mathbb{E}_{t-1}[x_t]) + \gamma y_{t-1} \tag{43}$$

Substituindo agora (1) e (43) em (2):

$$p_t = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(x_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1}]) + \gamma y_t + \frac{1}{2}(x_{t-2} + \mathbb{E}_{t-1}[x_t]) + \gamma y_{t-1}\right\} \tag{44}$$

$$\Rightarrow p_t = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}(x_{t-1} + x_{t-2})}_{=p_{t-1}} + \gamma(y_t + y_{t-1}) + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{E}_t[x_{t+1}] + x_t}_{=\mathbb{E}_t[p_{t+1}]} + \mathbb{E}_{t-1}[x_t] - x_t)\right\} \tag{45}$$

Fazendo $\varepsilon_{p_t} = -\frac{1}{4}(x_t - \mathbb{E}_{t-1}[x_t])$, temos que:

$$p_t = \frac{1}{2}(p_{t-1} + \mathbb{E}_t[p_{t+1}]) + \frac{\gamma}{2}(y_t + y_{t-1}) + \varepsilon_{p_t} \tag{46}$$

onde, ε_{p_t} é um ruído branco (não vamos provar aqui isso, mas é direto pela lei das expectativas iteradas e pelas propridades da distribuição normal). É imediato ver que $\mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_{p_t}] = 0$.
Podemos reescrever a equação (46) como:

$$\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_t = \frac{1}{2}(p_{t-1} + \mathbb{E}_t[p_{t+1}]) + \frac{\gamma}{2}(y_t + y_{t-1}) + \varepsilon_{p_t} \tag{47}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{(p_t - p_{t-1})}_{=\pi_t} = \frac{1}{2}\mathbb{E}_t[\underbrace{p_{t+1} - p_t}_{=\pi_{t+1}}] + \frac{\gamma}{2}(y_t + y_{t-1}) + \varepsilon_{p_t} \tag{48}$$

E finalmente, multiplicando tudo por 2 e fazendo $\varepsilon_{\pi_t} \equiv 2\varepsilon_{p_t}$ (também ruído branco),

$$\pi_t = \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \gamma(y_t + y_{t-1}) + \varepsilon_{\pi_t} \tag{49}$$

que é a Curva de Phillips, pois relaciona a inflação presente, π_t com a expectativa de inflação futura, $\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]$, e o hiato do produto somados à um choque do tipo ruído branco.

Exercício 3

- Vamos proceder de forma análoga ao último item do exercício anterior.
- Os contratos salarais são determinados de acordo com a seguinte equação.

$$x_t - p_t = \frac{1}{2}\{x_{t-1} - p_{t-1} + \mathbb{E}_t\{x_{t+1} - p_{t_1}\}\} + \gamma y_t$$

A curva de Phillips é uma relação entre a inflação e o hiato do produto.

$$x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} - p_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1} - p_{t+1}]) + \gamma y_t + \underbrace{p_t}_{=\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_t} \tag{50}$$

$$\Rightarrow x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1}]) + \gamma y_t + \frac{1}{2}\underbrace{(p_t - p_{t-1})}_{=\pi_t} - \frac{1}{2}\mathbb{E}_t[\underbrace{p_{t+1} - p_t}_{=\pi_{t+1}}] \tag{51}$$

$$\Rightarrow x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1}]) + \gamma y_t + \frac{1}{2}\pi_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] \tag{52}$$

Usando (52) em (2):

$$\begin{aligned} p_t = \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{2}(x_{t-1} + \mathbb{E}_t[x_{t+1}]) + \gamma y_t + \frac{1}{2}\pi_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \frac{1}{2}(x_{t-2} + \mathbb{E}_{t-1}[x_t]) \\ + \gamma y_{t-1} + \frac{1}{2}\pi_{t-1} - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t]\Big\} \end{aligned} \tag{53}$$

Agrupando,

$$\begin{aligned} p_t = \frac{1}{2}\{\underbrace{\frac{1}{2}(x_{t-1} + x_{t-2})}_{=p_{t-1}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{E}_t[x_{t+1} + x_t])}_{=\mathbb{E}_t[p_{t+1}]} + \frac{1}{2}\underbrace{(\mathbb{E}_{t-1}[x_t] - x_t)}_{\tilde{\varepsilon}_{p_t}} + \gamma(y_t + y_{t-1}) \\ + \frac{1}{2}(\pi_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \pi_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}[\pi_t])\} \end{aligned} \tag{54}$$

Assim,

$$\underbrace{p_t}_{\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_t} = \frac{1}{2}p_{t-1} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_t[p_{t+1}] + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{p_t} + \frac{\gamma}{2}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{4}(\pi_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \pi_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}[\pi_t]) \tag{55}$$

Fazendo $\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{p_t} = \varepsilon_{p_t}$ e rearranjando a equação acima:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}p_t - \frac{1}{2}p_{t-1} = \frac{1}{2}\mathbb{E}_t[p_{t+1} - p_t] + \frac{\varepsilon_{p_t}}{2} + \frac{\gamma}{2}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{4}(\pi_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \pi_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}[\pi_t]) \tag{56}$$

Aplicando a definição usual de inflação $\pi_t = p_t - p_{t-1}$ e multiplicando a equação acima por 2,

$$\pi_t = \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \varepsilon_{p_t} + \gamma(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2}(\pi_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \pi_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}[\pi_t]) \tag{57}$$

Mais um pouco de álgebra,

$$\frac{1}{2}\pi_t = \frac{1}{2}\pi_{t-1} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \gamma(y_t + y_{t-1}) + \varepsilon_{p_t} - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] \tag{58}$$

Somando $\frac{1}{2}\pi_t$ dos dois lados da equação acima:

$$\pi_t = \frac{1}{2}(\pi_{t-1} + \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]) + \gamma(y_t + y_{t-1}) + 2\varepsilon_{p_t} - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] + \frac{1}{2}\pi_t \tag{59}$$

Por último, defina $\varepsilon_{\pi_t} = 2\varepsilon_{p_t} - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] + \frac{1}{2}\pi_t$ e então a curva de Phillips fica:

$$\pi_t = \frac{1}{2}(\pi_{t-1} + \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]) + \gamma(y_t + y_{t-1}) + \varepsilon_{\pi_t} \tag{60}$$

Considere, sem provar, que ε_{π_t} é um ruído branco. Iremos provar, apenas, que ε_{π_t} atende o primeiro critério de ruído branco exposto na lista 1.

Lema 1. $\mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_{\pi_t}] = 0.$

Proof. Pela definição de ε_{π_t} dado no resolução do exercício, temos que:

$$\mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_{\pi_t}] = \mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_{p_t}] - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] = 0 \tag{61}$$

Pois $\mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_{p_t}] = 0$. □

Vale notar que, nessa nova formulação proposta em Fuhrer e Moore (1995), a Curva de Phillips passa a depender também da inflação passada além dos termos usuais.