Lista 4 - Política Econômica

Rodrigo Abreu - EPGE/FGV

Exercício 1)

- Resolvendo (1) de forma iterativa para frente, temos:

$\pi_{t+1} = \beta . E_{t+1}\{\pi_{t+2}\} + k . \tilde{y}_{t+1}$ (1'). Usando (1') em (1):

$\pi_t = \beta^2 E_t\{E_{t+1}\{\pi_{t+2}\}\} + \beta . k . E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} + k . \tilde{y}_t$. Repetindo esse procedimento,

$\pi_t = \beta^T . E_t\{\pi_{t+T}\} + \sum_{i=0}^{T-1} \beta^i . E_t\{\tilde{y}_{t+i}\}$. Tomando o limite com $T \to \infty$

e impondo a condição de transversalidade $\lim_{T\to\infty} \beta^T . E_t\{\pi_{t+T}\} = 0$

Assim, temos $\boxed{\pi_t = k . \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i . E_t\{\tilde{y}_{t+i}\}}$ (4)

A equação (4) nos diz que a inflação corrente, que as decisões de preço tomadas pelas firmas, depende inteiramente da trajetória futura esperada do hiato do produto.

- Resolvendo (2) para 1 período à frente, temos:

$\tilde{y}_t = E_t\{\tilde{y}_{t+2}\} - \frac{1}{\sigma} . E_t\{(i_{t+1} - E_{t+1}\{\pi_{t+2}\}\} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}) + u_t$
$+ E_t\{u_{t+1}\}$

- Repetindo o mesmo procedimento, até o período T, encontramos:

$$\tilde{y}_t = E_t\{\tilde{y}_{t+T}\} - \frac{1}{\sigma} E_t\left\{\sum_{j=0}^{T-1}(i_{t+j} - E_{t+j}\{\pi_{t+j+1}\})\right\} + E_t\left\{\sum_{j=0}^{T-1} u_{t+j}\right\}$$

- Tirando o limite, com $T \to \infty$, e impondo $\lim_{T\to\infty} E_t\{\tilde{y}_{t+T}\} = 0$,

obtemos: $\boxed{\tilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty} E_t\{r_{t+j}\} + \sum_{j=0}^{\infty} E_t\{u_{t+j}\}}$ (5)

A equação (5) nos diz que o hiato do produto corrente, que reflete tanto as decisões de produção como a capacidade produtiva disponíveis no presente, dependem de toda a trajetória futura da taxa real de juros (r_{t+j}) e dos choques futuros de demanda.

(B) Seja o vetor $x_t = \begin{pmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{pmatrix}$

Substituindo (3) em (2):

$$\tilde{y}_t = E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(\alpha \pi_t - E_t\{\pi_{t+1}\}\right) + u_t$$. Usando (1) nessa eq:

$$\tilde{y}_t = E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(\alpha . \pi_t - E_t\left\{\frac{1}{\beta}\left(\pi_t - k.\tilde{y}_t\right)\right\}\right) + u_t = E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left[\pi_t\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{k}{\beta}.\tilde{y}_t\right] + u_t \Rightarrow u_t + \tilde{y}_t\left(1 + \frac{k}{\sigma\beta}\right) + \frac{1}{\sigma}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right).\pi_t = E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} \quad (6)$$

Vamos usar (1) e (6) para reescrever o sistema na forma matricial.

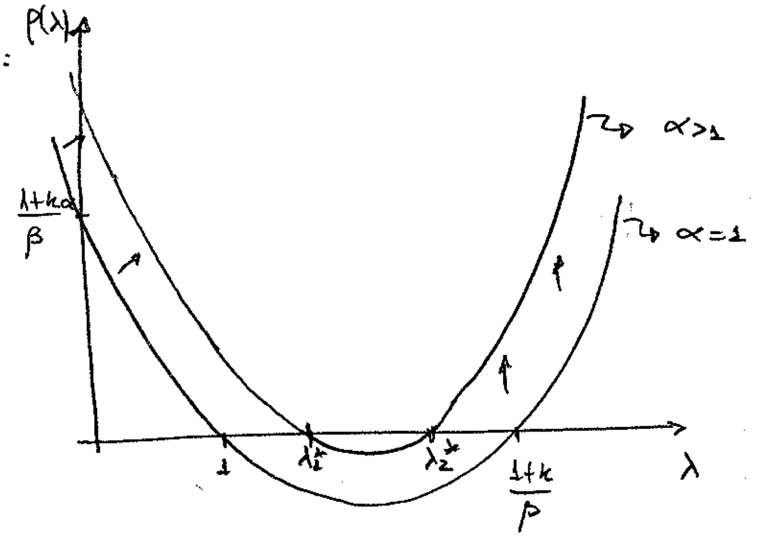
$$\begin{cases} E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} = \left(1 + \frac{k}{\sigma.\beta}\right).\tilde{y}_t + \frac{1}{\sigma}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right).\pi_t \\ E_t\{\pi_{t+1}\} = -\frac{1}{\beta}.k.\tilde{y}_t + \frac{1}{\beta}.\pi_t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_t\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ \pi_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{k}{\sigma\beta} & \frac{1}{\sigma}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) \\ -\frac{k}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} u_t$$

$\Rightarrow$ As condições de estabilidade e unicidade da solução do sistema formado pelas equações (1), (2) e (3).

Nesse sistema, temos duas variáveis forward-looking, i.e., $\tilde{y}_{t+1}$ e π_{t+1}. Usando a condição de Blanchard-Kahn, para unicidade e estabilidade da solução A deve ter dois autovalores maiores do que 1, em módulo. Continuaremos a ver isso no próximo item.

Graficamente:



onde $\lambda_2^* > \lambda_1^* > 1$

Note que a existência de solução única e estável, depende fundamentalmente do parâmetro α ser maior do que 1. Mas isso significa que a taxa nominal de juros precisa aumentar mais do que proporcionalmente ao aumento da inflação, pois $i = \alpha . \pi_t$. Assim, o BC precisa desenvolver uma política monetária bastante ativa para garantir a existência de um equilíbrio único. A condição $\alpha > 1$ é conhecida na literatura como princípio de Taylor.

(D) Estamos assumindo $\sigma = 1$ e $\alpha > 1$

Vamos encontrar a solução pelo método dos coeficientes indeterminados. Vamos propor soluções lineares do tipo:

$$\tilde{y}_t = \gamma_y . u_t \qquad (8)$$

$$\pi_t = \gamma_\pi . u_t \qquad (9)$$

como $E_t\{\tilde{y}_{t+i}\} = 0$ e $E_t\{\pi_{t+i}\} = 0$, $\forall i > 0$, podemos substituir em (8) e (9):

$$\begin{cases} \pi_t = \beta . \cancel{E_t\{\pi_{t+1}\}} + k . \tilde{y}_t \\ \tilde{y}_t = \cancel{E_t\{\tilde{y}_{t+1}\}} + \cancel{E_t\{\pi_{t+1}\}} - \alpha \pi_t + u_t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_\pi u_t = k . \gamma_y . u_t \\ \gamma_y u_t = -\alpha . \gamma_\pi . u_t + u_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_\pi = \frac{k . \gamma_y . \cancel{u_t}}{\cancel{u_t}} \Rightarrow \boxed{\gamma_\pi = k . \gamma_y} \\ \gamma_y = -\alpha . \gamma_\pi + 1 \Rightarrow \boxed{\gamma_\pi = \frac{1 - \gamma_y}{\alpha}} \end{cases}$$

fl5

$$\frac{1-\gamma_y}{\alpha} = \kappa \cdot \gamma_y \Rightarrow \gamma_y(\alpha\kappa + 1) = 1 \Rightarrow \boxed{\gamma_y = \frac{1}{\alpha\kappa + 1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_\pi = \frac{\kappa}{1 + \alpha \cdot \kappa}}$$

logo
$$\begin{cases} \tilde{y}_t = \left(\dfrac{1}{1+\alpha \cdot \kappa}\right) \cdot u_t & (12) \\ \pi_t = \left(\dfrac{\kappa}{1+\alpha \cdot \kappa}\right) u_t & (13) \end{cases}$$

(E)

A política monetária segue uma regra de taylor no qual o parâmetro α mede a sensibilidade da taxa de juros à inflação. Lembre que quanto mais ativa a política monetária, maior será o α.

Note, por (12) que o governo (BC) pode compensar um choque positivo contemporâneo de demanda com uma reação mais brusca da política monetária. Isso "Ameniza" o impacto dos choques de demanda sobre o produto e a inflação de equilíbrio.

fl6

Exercício 3)

A) Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$\tilde{y}_t = E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(\alpha_i \pi_t - E_t\{\pi_{t+1}\}\right) + g_t - E_t\{g_{t+1}\} \quad (1')$$

Nosso objetivo é obter o hiato ($\tilde{y}_t$) e a inflação de equilíbrio (π_t) usando o método dos coeficientes indeterminados sobre as sequências exógenas $\{g_t\}_t$ e $\{z_t\}_t$.. Vamos propor as seguintes soluções lineares:

$$\pi_t = a_1 . g_t + a_2 z_t \quad (5)$$
$$\tilde{y}_t = b_1 g_t + b_2 z_t \quad (6)$$

Como hipótese, os choques exógenos são i.i.d., com média zero.

Assim $E_t\{g_{t+1}\} = E_t\{z_{t+1}\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_t\{\pi_{t+1}\} = 0 \\ E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} = 0, \text{ disso.} \end{cases} \quad (7)$

Usando (7) e substituindo (5) e (6) em (1') e (2), temos:

$$\begin{cases} b_1 . g_t + b_2 . z_t = -\sigma^{-1} \alpha (a_1 g_t + a_2 . z_t) + g_t \\ a_1 . g_t + a_2 . z_t = \kappa (b_1 . g_t + b_2 . z_t) + \kappa . \psi . z_t - \kappa . \psi . \sigma^{-1} g_t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_t (b_1 + \sigma^{-1} \alpha . a_1 - 1) + z_t (b_2 + \sigma^{-1} \alpha . a_2) = 0 \\ g_t (a_1 - \kappa . b_1 + \kappa . \psi \sigma^{-1}) + z_t (a_2 - \kappa b_2 - \kappa . \psi) = 0 \end{cases}$$

logo, teremos as seguintes restrições sobre os parâmetros

$$\begin{cases} b_1 + \sigma^{-1} \alpha . a_1 = 1 & (i) \\ b_2 + \sigma^{-1} \alpha a_2 = 0 & (ii) \\ a_1 + \kappa . \psi . \sigma^{-1} = \kappa b_1 & (iii) \\ \kappa . b_2 + \kappa . \psi = a_2 & (iv) \end{cases}$$

Resolvendo:

- De (i) em (iv) $\Rightarrow$ $a_1 + \kappa . \psi . \sigma^{-1} = \kappa (1 - \sigma^{-1} \alpha . a_1) \Rightarrow$

fl. 7

$$a_1(1+k\cdot\alpha\cdot\sigma^{-1}) = k(1-\psi\cdot\sigma^{-1}) \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{k(1-\psi\sigma^{-1})}{1+k\alpha\sigma^{-1}}} \quad (v)$$

Usando (v) em (i)

- $$b_1 = 1-\sigma^{-1}\alpha\cdot k\left(\frac{1-\psi\cdot\sigma^{-1}}{1+k\alpha\sigma^{-1}}\right) = \frac{1+\cancel{k\cdot\alpha\sigma^{-1}}-\cancel{\sigma^{-1}\alpha\cdot k}+\sigma^{-1}\alpha k\psi\sigma^{-1}}{1+k\cdot\alpha\cdot\sigma^{-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{1+\sigma^{-2}\alpha\cdot k\cdot\psi}{1+k\cdot\alpha\cdot\sigma^{-1}}} \quad (vi)$$

- De (ii) e (iv):

$$k\cdot b_2 + k\psi = -\frac{b_2}{\sigma^{-1}\cdot\alpha} \Rightarrow b_2\left(k+\frac{1}{\sigma^{-1}\alpha}\right) = -k\cdot\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{b_2 = -\frac{k\cdot\psi\cdot\sigma^{-1}\alpha}{1+\sigma^{-1}\alpha k}} \quad (vii)$$

- Usando (vii) em (ii):

$$a_2 = \frac{-b_2}{\sigma^{-1}\alpha} \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{\alpha\cdot\sigma^{-1}}\left(\frac{-k\cdot\psi\cdot\sigma^{-1}\alpha}{1+\sigma^{-1}\alpha k}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{k\cdot\psi}{1+\sigma^{-1}\alpha k}} \quad (viii)$$

Dessa forma, a solução para produto, inflação e juros, será:

$$\tilde{y}_t = \left(\frac{1+\sigma^{-2}\alpha\cdot k\psi}{1+k\cdot\alpha\cdot\sigma^{-1}}\right)\cdot g_t - \frac{k\cdot\psi\cdot\sigma^{-1}\alpha}{1+\sigma^{-1}\alpha\cdot k}\cdot z_t \quad (8)$$

$$\pi_t = \frac{k(1-\psi\cdot\sigma^{-1})}{1+k\alpha\cdot\sigma^{-1}}\cdot g_t + \frac{k\cdot\psi\cdot z_t}{1+\sigma^{-1}\alpha k} \quad (9)$$

$$i_t = \frac{\alpha\cdot k(1-\psi\cdot\sigma^{-1})}{1+k\alpha\cdot\sigma^{-1}}\cdot g_t + \frac{\alpha\cdot k\psi}{1+\sigma^{-1}\alpha\cdot k}\cdot z_t \quad (10)$$

(B) Vamos usar (8), (9) e (10) para determinar o impacto de um Choque positivo em g_t sobre:

- hiato do produto: $$\frac{\partial \tilde{y}_t}{\partial g_t} = \frac{1 + \sigma^{-2}.\alpha.k.\psi}{1 + k.\alpha.\sigma^{-1}} > 0$$

- inflação: $$\frac{\partial \pi_t}{\partial g_t} = \frac{k.(1-\psi.\sigma^{-1})}{1 + k\,\alpha.\sigma^{-1}} > 0$$, pois, por hipótese $\psi/\sigma < 1$.

Assim, um choque positivo nos gastos do governo aumenta tanto o produto como a inflação. A elevação dos gastos do governo aumenta a demanda agregada por produto, isso faz com que o produto corrente fique acima do potencial, o que torna o hiato do produto positivo. O aumento da demanda também causa pressão positiva sobre os preços, por isso temos inflação.

(C) Note que:

- Se $\frac{\psi}{\sigma} < 1$, a inflação aumenta com aumento dos gastos.
- Se $\frac{\psi}{\sigma} > 1$, " diminui com " ".
- Se $\frac{\psi}{\sigma} = 1$, " não muda com " ".

Quando o governo aumenta seus gastos, ocorrem nessa economia dois efeitos simultâneos: Um efeito oferta e um efeito Demanda. O efeito demanda ocorre pois o governo absorve parcela maior do produto disponível na Economia. Para fazer frente ao aumento na demanda, as firmas contratam mais trabalhadores, o insumo variável de curto prazo. No entanto, o aumento da oferta de trabalho, e por conseguinte, o aumento na produção, dependem do imposto que o governo cobra sobre os salários. Se $\psi/\sigma < 1$ o imposto é tão alto que a oferta de trabalho, e a produção, crescem em ritmo menor do que a demanda e a inflação aumenta. Nesse caso o efeito demanda é dominante.

(D) Das soluções obtidas no item (A), temos:

- hiato do produto: $\dfrac{\partial \tilde{y}_t}{\partial z_t} = -\dfrac{\kappa \cdot \Psi \cdot \sigma^{-1} \alpha}{1 + \sigma^{-1} \alpha \kappa} < 0$

- Inflação: $\dfrac{\partial \pi_t}{\partial z_t} = \dfrac{\kappa \cdot \Psi}{1 + \sigma^{-1} \alpha \kappa} > 0$

Dessa forma, um choque tributário negativo resulta em aumento do produto e redução da inflação.

A queda da tributação do trabalho gera incentivos para que os agentes aumentem a oferta de trabalho, o que, por consequência aumenta a produção da economia como um todo. Esse fenômeno resulta em um choque positivo de oferta. Como a demanda por bens permanece estável, o excesso de oferta leva as firmas a reduzirem os preços para vender seus produtos. Com isso a inflação cai.

Questão 2)

$\underline{fl_{10}}$

(A) Pela equação (2), temos que:

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n) = E_t\{\tilde{y}_{t+1} - \tilde{y}_t\} = E_t\{\Delta\tilde{y}_{t+1}\}$$

=> Substituindo (3) na expressão acima =>

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)(\rho + \phi_\pi.\pi_t + \phi_y.\tilde{y}_t + v_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n) = E_t\{\Delta\tilde{y}_{t+1}\} \Rightarrow \text{Subst. (1)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)[\rho + \phi_\pi.(\beta.E_t\{\pi_{t+1}\} + k\tilde{y}_t) + \phi_y.\tilde{y}_t + v_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n = E_t\{\Delta\tilde{y}_{t+1}\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sigma}\right)[\rho + E_t\{\pi_{t+1}\}\underbrace{(\cancel{\phi_\pi.\beta - 1})}_{\text{usando } \phi_\pi.\beta=1} + \tilde{y}_t\underbrace{(\cancel{\phi_\pi.k + \phi_y})}_{\text{usando } \phi_\pi.k=-\phi_y} + v_t - r_t^n] = E_t\{(y_{t+1} - y_{t+1}^n) - (y_t - y_t^n)\}$$

$$\Rightarrow \rho + v_t - r_t^n = \sigma.[\underbrace{E_t\{\Delta y_{t+1}\}}_{\text{usando hip}}^{0} - E_t\{\Delta y_{t+1}^n\}] \Rightarrow$$

$$r_t^n = \rho + v_t + \sigma.E_t\{\Delta y_{t+1}^n\} = \rho + v_t + \sigma.E_t\{\psi_{y,a}a_{t+1} + \cancel{z_y^n} - \psi_{y,a}a_t - \cancel{z_y^n}\}$$

$$= \rho + v_t + \sigma E_t\{\psi_{y,a}(\rho_a.a_t + \varepsilon_{t+1}^a - a_t)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_t^n = \rho + v_t + \sigma.\psi_{y,a}a_t(\rho_a - 1)$$

ou $$\boxed{r_t^n = \rho + v_t - \sigma.\psi_{y,a}.(1-\rho_a).a_t}$$

(B) Resolvendo a curva de Phillips:

$$\pi_t = \beta E_t\{\pi_{t+1}\} + k.\tilde{y}_t \quad (a)$$

$$\pi_{t+1} = \beta E_{t+1}\{\pi_{t+2}\} + k.\tilde{y}_{t+1} \quad (b)$$

inserindo (b) em (a), temos: $\pi_t = \beta^2 E_t\{\pi_{t+2}\} + \beta.E_t\{k.\tilde{y}_{t+1}\} + k.\tilde{y}_t$

Repetindo esse procedimento recursivamente, temos, até a data T,

$$\pi_t = \beta^T \cdot \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+T}\} + \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \cdot \kappa \cdot \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+j}\}.$$ Para que essa equação em diferenças tenha solução única, é preciso impor que: $\lim_{T\to\infty} \beta^T \cdot \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+T}\} = 0$

Note que isso será verdade se $\beta \in (0,1)$.

Assim, $$\boxed{\pi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \cdot \kappa \cdot \mathbb{E}_t\{y_{t+j}\}}$$

Essa equação nos diz que a inflação corrente é o valor presente descontado do hiato do produto esperado dos períodos futuros.

- Resolvendo a eq. em diferenças da IS dinâmica:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t\{y_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n\right) \quad (c)$$

Note que a taxa real de juros é dada pela seguinte aproximação da Equação de Fisher: $r_t = i_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\}$. Além disso:

$$\tilde{y}_{t+1} = \mathbb{E}_t\{y_{t+2}\} - \frac{1}{\sigma}\left(r_{t+1} - r_{t+1}^n\right) \quad (d)$$

Substituindo (d) em (c)

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t\{y_{t+2}\} - \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}_t\{r_{t+1} - r_{t+1}^n\} - \frac{1}{\sigma}(r_t - r_t^n)$$

Seguindo esse padrão, de forma recursiva, obtemos:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+T}\} - \frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{T-1}\mathbb{E}_t\{r_{t+j} - r_{t+j}^n\}$$

impondo a condição de transversalidade: $\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+T}\} = 0$, obtemos:

$$\boxed{\tilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}_t\{r_{t+j} - r_{t+j}^n\}}$$

Essa equação nos diz que o hiato do produto corrente é proporcional à soma dos desvios esperados entre a taxa real de juros e a natural.

(c) seja $x_t \equiv (\tilde{y}_t, \pi_t)$, Substitua (3) em (2)

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+1}\} - \left(\frac{1}{\sigma}\right)\left(\rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \cdot \tilde{y}_t + v_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+1}\} = \tilde{y}_t + \frac{1}{\sigma}\left(\rho + \phi_\pi . \pi_t + \phi_y \cdot \tilde{y}_t + v_t - \left(\frac{1}{\beta}\cdot \pi_t - \frac{\kappa}{\beta}\tilde{y}_t\right) - r_t^n\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+1}\} = \tilde{y}_t\left(1 + \frac{\phi_y}{\sigma} + \frac{\kappa}{\sigma\beta}\right) + \pi_t \cdot \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\sigma}\left(\rho + v_t - r_t^n\right)$$

por (1)

$$\mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} = \frac{1}{\beta}\cdot \pi_t - \frac{1}{\beta}\cdot \kappa \cdot \tilde{y}_t$$

Assim, temos:

$$\mathbb{E}_t \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{y}_{t+1} \\ \pi_{t+1} \end{pmatrix}}_{x_{t+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sigma}\left(\phi_y + \frac{\kappa}{\beta}\right) & \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi - \frac{1}{\beta}\right) \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{pmatrix}}_{x_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{(v_t - r_t^n)}_{u_t} + \frac{\rho}{\sigma}$$

(d) Como $\hat{r}_t^n \equiv r_t^n - \rho$ e $\hat{r}_t^n = 0 \Rightarrow r_t^n = \rho$

Vamos usar o metodo dos coeficientes indeterminados para obter o produto e a inflação de equilibrio. Substitua (3) em (2) para obter:

$$\tilde{y}_t = \mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(\rho + \phi_\pi . \pi_t + \phi_y \cdot \tilde{y}_t + v_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} - \cancel{r_t^n}\right) \quad (7)$$

note que a parte exógena da equação acima é v_t. Vamos assumir uma solução do tipo: $\tilde{y}_t = \psi_{y,v}\cdot v_t$ e $\pi_t = \psi_{\pi,v}\cdot v_t$

logo $\mathbb{E}_t\{y_{t+1}\} = \mathbb{E}_t\{\psi_{y,v}\cdot v_{t+1}\} = \mathbb{E}_t\{\psi_{y,v}(\rho_v \cdot v_t + \varepsilon_{t+1}^v)\}$

Como $\{\varepsilon_t^v\}_{t=0}^{\infty}$ é um choque i.i.d $\mathbb{E}_t\{\varepsilon_{t+1}^v\} = 0$, $\forall t \geq 0$.

Assim, $\mathbb{E}_t\{\tilde{y}_{t+1}\} = \psi_{y,v}.\rho_v.v_t$.

Analogamente,

$$\mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} = \psi_{\pi,v}.\rho_v.v_t$$

- Substituindo em (7) temos:

$$\psi_{y,v}.v_t = \psi_{y,v}.\rho_v.v_t - \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi.\psi_{\pi,v}.\rho_v.v_t + \phi_y.\psi_{y,v}.\rho_v.v_t + v_t - \psi_{\pi,v}.\rho_v.v_t\right)$$

$$v_t\left(\psi_{y,v} - \psi_{y,v}\rho_v + \frac{\phi_\pi}{\sigma}.\psi_{\pi,v}.\rho_v + \frac{\phi_y.\rho_v}{\sigma}.\psi_{y,v} + \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\psi_{\pi,v}.\rho_v\right) = 0$$

$$v_t\left[\psi_{y,v}\left(1-\rho_v+\frac{\phi_y.\rho_v}{\sigma}\right) + \psi_{\pi,v}\left(\frac{\phi_\pi}{\sigma}.\rho_v - \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma\,\psi_{y,v}\left(1-\rho_v+\frac{\phi_y.\rho_v}{\sigma}\right) + \frac{1}{\cancel{\sigma}}.\psi_{\pi,v}\left(\phi_\pi\,\rho_v - 1\right) = -\frac{1}{\cancel{\sigma}}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_{y,v}\left(\sigma - \sigma\rho_v + \phi_y.\rho_v\right) + \psi_{\pi,v}\left(\phi_\pi.\rho_v - 1\right) = -1 \qquad (8)$$

- Substituindo em (1)

$$\psi_{\pi,v}.v_t = \beta.\psi_{\pi,v}\rho_v.v_t + \kappa.\psi_{y,v}.v_t \quad \Rightarrow$$

$$v_t\left(\psi_{\pi,v} - \beta.\psi_{\pi,v}.\rho_v - \kappa.\psi_{y,v}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\psi_{\pi,v}\left(1-\beta.\rho_v\right) - \kappa.\psi_{y,v} = 0 \qquad (9)$$

por (9) $\Rightarrow \psi_{y,v} = +\dfrac{\psi_{\pi,v}\left(1-\beta.\rho_v\right)}{\kappa} \Rightarrow$ subst em (8) $\Rightarrow$

$$+\psi_{\pi,v}\frac{(1-\beta.\rho_v)}{\kappa}.\left[\sigma(1-\rho_v) + \phi_y.\rho_v\right] + \psi_{\pi,v}\left(\phi_\pi.\rho_v - 1\right) = -1$$

$$\Rightarrow \psi_{\pi,v}\left[\frac{+(1-\beta.\rho_v)\left[\sigma(1-\rho_v)+\phi_y\rho_v\right] + \kappa(\phi_\pi\rho_v - 1)}{\kappa}\right] = -1$$

$$\Rightarrow \psi_{\pi,v} = -\kappa.\frac{1}{(1-\beta.\rho_v)\left[\sigma(1-\rho_v)+\phi_y\rho_v\right] + \kappa(\phi_\pi\rho_v - 1)}$$

Defina; $\Lambda_v \equiv \dfrac{1}{(1-\beta\rho_v)[\sigma(1-\rho_v)+\phi_y\rho_v]+\kappa(\phi_\pi\rho_v-1)}$

logo: $\boxed{\pi_t = -\kappa.\Lambda_v.\vartheta_t}$ (10)

Como $\psi_{y,\vartheta} = \dfrac{\psi_{\pi,v}(1-\beta.\rho_v)}{\kappa} = \dfrac{-\cancel{\kappa}.\Lambda_v.(1-\beta\rho_v)}{\cancel{\kappa}}$

$\Rightarrow \psi_{y,\vartheta} = -\Lambda_v(1-\beta\rho_v)$

logo $\boxed{\tilde{y}_t = -(1-\beta\rho_v).\Lambda_v\vartheta_t}$ (11)

(E) Vamos supor que $\vartheta_t = 0$ e usar a expressão para a taxa natural obtida no item (a): $r_t^n = \rho - \psi_{y,a}\sigma(1-\rho_a).a_t$ //

$\hat{r}_t^n$ é o desvio da taxa natural de juros corrente em relação a seu valor de steady-state: $r^n = \rho$. Então, teremos:

$\hat{r}_t^n \equiv \cancel{\rho} - \psi_{y,a}.\sigma.(1-\rho_a)a_t - \cancel{\rho} \Rightarrow$

$\boxed{\hat{r}_t^n = -\psi_{y,a}.\sigma.(1-\rho_a)a_t}$

Vamos propor como solução:

$$\begin{cases} \tilde{y}_t = \psi_{y,r}.\hat{r}_t^n \\ \pi_t = \psi_{\pi,r}.\hat{r}_t^n \end{cases}$$

logo, • $E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} = E_t\{\psi_{y,r}.\hat{r}_{t+1}^n\} = \psi_{y,r}.E_t\{-\psi_{y,a}.\sigma.(1-\rho_a)(\rho_a.a_t+\varepsilon_{t+1}^a)\}$

$\Rightarrow E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} = -\psi_{y,r}.\psi_{y,a}.\sigma(1-\rho_a).\rho_a.a_t$ //

Analogamente

• $E_t\{\pi_{t+1}\} = -\psi_{\pi,r}.\psi_{y,a}\sigma(1-\rho_a).\rho_a.a_t$ //

• usando isso em (1):

$$\psi_{\pi,r}\,\hat r_t^n = -\beta\,\psi_{\pi,r}\,\underbrace{\psi_{y,a}\,\sigma(1-\rho_a)\,\rho_a\,a_t}\, + \kappa\psi_{y,r}\,\hat r_t^n$$

Note que $-\psi_{y,a}\,\sigma(1-\rho_a)\,a_t = \hat r_t^n$

$$\Rightarrow \psi_{\pi,r}\,\cancel{\hat r_t^n} = \beta\,\psi_{\pi,r}\,\cancel{\hat r_t^n}\,\rho_a + \psi_{y,r}\,\cancel{\hat r_t^n}\,\kappa \Rightarrow \boxed{\psi_{\pi,r}(1-\beta\rho_a) = \kappa\psi_{y,r}} \quad (*)$$

• usando em (2):

$$\psi_{y,r}\,\hat r_t^n = \psi_{y,r}\big(\underbrace{-\psi_{y,a}\,\sigma(1-\rho_a)\,a_t}_{\hat r_t^n}\big)\rho_a - \sigma^{-1}\Big[\cancel{\rho} + \phi_\pi\,\psi_{\pi,r}\,\hat r_t^n + \phi_y\,\psi_{y,r}\,\hat r_t^n$$

$$- \psi_{\pi,r}\big(\underbrace{-\psi_{y,a}\,\sigma(1-\rho_a)\,a_t}_{\hat r_t^n}\big)\rho_a - \cancel{\rho} + \underbrace{\psi_{y,a}\,\sigma(1-\rho_a)\,a_t}_{-\hat r_t^n}\Big]$$

$$\Rightarrow \psi_{y,r}\,\cancel{\hat r_t^n} = \psi_{y,r}\,\rho_a\,\cancel{\hat r_t^n} - \sigma^{-1}\cancel{\hat r_t^n}\left(\phi_\pi\,\psi_{\pi,r} + \phi_y\,\psi_{y,r} - \psi_{\pi,r}\,\rho_a - 1\right)$$

$$\psi_{y,r}(1-\rho_a+\sigma^{-1}\phi_y) = -\sigma^{-1}\,\psi_{\pi,r}(+\phi_\pi-\rho_a) + \sigma^{-1}$$

$$\cdot\,\sigma\,\psi_{yr}(1-\rho_a+\sigma^{-1}\phi_y) + \sigma\,\sigma^{-1}\,\psi_{\pi,r}(\phi_\pi-\rho_a) = +1$$

$$\Rightarrow \psi_{yr}[\sigma(1-\rho_a)+\phi_y] + \psi_{\pi,r}(\phi_\pi-\rho_a) = +1$$

Usando (*):

$$\psi_{\pi,r}\,\frac{(1-\beta\rho_a)}{\kappa}[\sigma(1-\rho_a)+\phi_y] + \psi_{\pi,r}(\phi_\pi-\rho_a) = +1$$

$$\psi_{\pi,r}\Big[(1-\beta\rho_a)[\sigma(1-\rho_a)+\phi_y] + \kappa(\phi_\pi-\rho_a)\Big] = +\kappa$$

$$\psi_{\pi,r} = +\frac{\kappa}{(1-\beta\rho_a)[\sigma(1-\rho_a)+\phi_y]+\kappa(\phi_\pi-\rho_a)}$$

Defina $$\Lambda_a \equiv \frac{1}{(1-\beta\rho_a)[\sigma(1-\rho_a)+\phi_y]+\kappa(\phi_\pi-\rho_a)}$$

$$\Rightarrow \psi_{y,r} = \Lambda_a (1 - \beta . \rho_a)$$

A soluções serão:

$$\begin{cases} \tilde{y}_t = \Lambda_a (1 - \beta . \rho_a) . \hat{r}_t^n \\ \pi_t = k . \Lambda_a \hat{r}_t^n \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \tilde{y}_t = -\Lambda_a (1 - \beta . \rho_a) . \psi_{y,a} (1 - \rho_a) . \sigma . a_t \\ \hat{\pi}_t = -k . \Lambda_a \psi_{y,a} . \sigma . (1 - \rho_a) . a_t \end{cases}$$