3ª LISTA DE EXERCÍCIOS - PEC

Rodrigo Abreu

Exercício 1)

a-

Note que teremos uma restrição orçamentária para cada t. Assim, precisamos também de uma sequência de multiplicadores de Lagrange. O Lagrangeano será dado por:

$$\mathcal{L} = E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ u(C_t, N_t) + \lambda_t \left(B_{t-1} + W_t N_t - T_t - P_t C_t - Q_t B_t \right)\right\}\right]$$

As variáveis endógenas escolhidas pelo agente são: C_t, N_t, B_t. Dessa forma, as condições de primeira ordem desse problema são dadas por:

$[C_t]$: $\beta^t . u_c(t) + \lambda_t . (-P_t) . \beta^t = 0 \quad , \forall t \quad (1)$

notação: $\dfrac{\partial u(C_t, N_t)}{\partial C_t} \equiv u_c(t)$

$[N_t]$: $\beta^t . u_N(t) + \beta^t \lambda_t . W_t = 0 \quad , \forall t \quad (2)$

$[B_t]$: $\beta^{t+1} E[\lambda_{t+1}] . 1 - \beta^t \lambda_t . Q_t = 0 \quad , \forall t \quad (3)$

- reorganizando (1), temos: $\lambda_t = \dfrac{u_c(t)}{P_t}$ (4). Assim, vemos que o multiplicador de Lagrange associado à restrição orçamentária é o valor real da utilidade marginal do consumo.

- reorganizando (2), temos: $\dfrac{u_N(t)}{W_t} = -\lambda_t \quad (5)$

De (4) e (5) $\Rightarrow$ $\dfrac{u_N(t)}{W_t} = -\dfrac{u_c(t)}{P_t} \Rightarrow \dfrac{u_N(t)}{u_c(t)} = -\dfrac{W_t}{P_t} \quad (6)$

A eq. (6) representa a taxa marginal de substituição entre consumo e trabalho. Como $u_N(\cdot) < 0$ e $u_c(\cdot) > 0$, (6) é positivo e representa o quanto o indivíduo precisa ganhar, em termos de consumo real, para reduzir marginalmente sua oferta de trabalho.

De (4) e (3), obtemos: $\lambda_t . Q_t = E_t[\lambda_{t+1}] . \beta \Rightarrow Q_t . \dfrac{u_c(t)}{P_t} = E_t\left[\dfrac{u_c(t+1)}{P_{t+1}}\right] \beta$

$$Q_t = \mathbb{E}_t\left[\frac{u_c(t+1)}{u_c(t)} \cdot \frac{P_t}{P_{t+1}}\right] \cdot \beta \quad (7)$$

A equação (7) é também conhecida como equação de Euller do consumo, podemos reescrevê-la como:

$$\frac{u_c(t) \cdot Q_t}{P_t} = \beta \cdot \mathbb{E}_t\left[\frac{u_c(t+1)}{P_{t+1}}\right]$$

- lembrando que poupança no presente significa abrir mão do consumo em t, A equação acima nos diz que o agente abre mão de consumir no presente comprando títulos (o mecanismo de poupança), até o ponto em que sua utilidade marginal do consumo em t é igual ao valor presente da utilidade marginal em t+1, já considerando que o indivíduo pode usar a poupança formada em t para consumir.
- A equação (7) é também uma equação para precificação de ativos. Nesse caso particular podemos usá-la para precificar o título de renda fixa.

(B) Considerando a função utilidade $U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$, temos.

$u_c(t) = C_t^{-\sigma}$
$u_N(t) = -N_t^{+\varphi}$

Assim, temos:

- usando (6): $\frac{-N_t^{+\varphi}}{C_t^{-\sigma}} = -\frac{W_t}{P_t} \Rightarrow \frac{N_t^{+\varphi}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t}$ tomando o logarítmo, temos $\varphi \cdot \underbrace{\log N_t}_{\equiv n_t} - (-\sigma) \cdot \underbrace{\log C_t}_{\equiv c_t} = \underbrace{\log W_t}_{\equiv w_t} - \underbrace{\log P_t}_{\equiv p_t} \Rightarrow$

$$\varphi \cdot n_t + \sigma \cdot c_t = w_t - p_t \quad (8)$$

- usando (7): $Q_t = \beta \cdot \mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma} \cdot \frac{P_t}{P_{t+1}}\right]$. tomando o $\log(\cdot)$,

$$\underbrace{\log a_t}_{-i_t} = \underbrace{\log \beta}_{= -\rho} + E_t\Big[-\sigma(\underbrace{\log c_{t+1}}_{= c_{t+1}} - \underbrace{\log c_t}_{= c_t}) + \underbrace{\log P_t - \log P_{t+1}}_{= -\pi_{t+1}}\Big]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma}\left(-i_t + \rho + E_t\{\pi_{t+1}\}\right) = -E_t[c_{t+1}] + c_t \Rightarrow$$

$$\boxed{c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\right)} \quad (9)$$

(C) O problema dinâmico da firma é equivalente a um problema estático a cada período do tempo.

$$\max_{N_t} P_t.Y_t - W_t.N_t \iff \max_{N_t} P_t.A_t.N_t^{1-\alpha} - W_t.N_t$$

CPO:

$$[N_t]: \quad P_t.A_t.(1-\alpha).N_t^{-\alpha} - W_t = 0$$

$$\Rightarrow N_t^{-\alpha} = \frac{W_t}{P_t.A_t.(1-\alpha)} \Rightarrow \boxed{N_t = \left(\frac{W_t}{P_t.A_t.(1-\alpha)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}} \quad (10)$$

tomando o $\log(\cdot)$ de (10):

$$\underbrace{\log N_t}_{= n_t} = -\frac{1}{\alpha}\Big[\underbrace{\log W_t}_{= w_t} - (\underbrace{\log P_t}_{= p_t} + \underbrace{\log A_t}_{= a_t} + \log(1-\alpha))\Big]$$

$$-\alpha.n_t = w_t - p_t - a_t - \log(1-\alpha) \Rightarrow$$

$$\boxed{w_t - p_t = -\alpha.n_t + a_t + \log(1-\alpha)} \quad (11)$$

(D) Dada a função de produção do enunciado, $Y_t = A_t N_t^{(1-\alpha)}$, temos a seguinte forma log-linearizada:

$$\log Y_t = \log A_t + (1-\alpha)\log N_t \Rightarrow \boxed{y_t = a_t + (1-\alpha).n_t} \quad (12)$$

fl4

pela equação (8), considerando a condição de equilíbrio do mercado de bens ($c_t = y_t$):

$$w_t - p_t = \sigma . c_t + \varphi . n_t \Rightarrow w_t - p_t = \sigma . y_t + \varphi n_t \quad (13)$$

- combinando (13) com (11), temos:

$$a_t - \alpha . n_t + \log(1-\alpha) = \sigma . y_t + \varphi . n_t \quad (14)$$

- usando (12) em (14) obtemos:

$$a_t + \log(1-\alpha) = \sigma\left(a_t + (1-\alpha) . n_t\right) + (\varphi + \alpha) . n_t$$

(15) $\boxed{n_t = \psi_{n,a} . a_t + \vartheta_n}$, onde $\psi_{n,a} \equiv \dfrac{1-\sigma}{\varphi + \alpha + \sigma(1-\alpha)}$

$$\vartheta_n \equiv \frac{\log(1-\alpha)}{\varphi + \alpha + \sigma(1-\alpha)}$$

- o produto de equilíbrio será dado por:

$$y_t = a_t + (1-\alpha) . \left(\psi_{n,a} . a_t + \vartheta_n\right) = a_t\left(1 + \psi_{n,a} . (1-\alpha)\right) + (1-\alpha) . \vartheta_n$$

defina: $\psi_{y,a} \equiv 1 + \psi_{n,a}(1-\alpha)$ e $\vartheta_y \equiv (1-\alpha) . \vartheta_n$

$$\Rightarrow \boxed{y_t = \psi_{y,a} . a_t + \vartheta_y} \quad (16)$$

(e) Partindo da equação de Euler linearizada, (9), e usando a relação de equilíbrio no mercado de bens ($c_t = y_t, \forall t$), temos:

$$y_t = E_t\{y_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho\right)$$

Definindo a taxa real de juros como: $r_t \equiv i_t - E_t\{\pi_{t+1}\}$, e substituindo na equação anterior, temos:

$$r_t - \rho = -\sigma\left(y_t - E_t\{y_{t+1}\}\right) \Rightarrow r_t = \sigma E_t\{\Delta y_{t+1}\} + \rho$$

usando (16) $\Delta y_{t+1} = \psi_{y,a} . a_{t+1} + \vartheta_y - \psi_{y,a} a_t - \vartheta_y = \psi_{y,a}(a_{t+1} - a_t)$

$\Rightarrow \Delta y_{t+1} = \psi_{y,a} \Delta a_{t+1}$

Como a_t segue um processo exógeno, temos que o processo gerador do juro real é:

$$\boxed{r_t = \rho + \psi_{y,a} . \sigma . E_t\{a_{t+1}\}} \quad (17)$$

(f) O salário real linearizado é dado por $w_t - p_t \equiv \omega_t$.

usando (11), temos:

$$\omega_t = a_t - \alpha . (\psi_{n,a} . a_t + \vartheta_n) + \log(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \omega_t = \underbrace{(1 - \alpha . \psi_{n,a})}_{\equiv \psi_{w,a}} . a_t + \underbrace{\log(1-\alpha) - \alpha . \vartheta_n}_{\equiv \vartheta_w}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_t = \psi_{w,a} . a_t + \vartheta_w} \quad (18)$$

(g) Ainda que tivéssemos uma equação para a demanda por moeda, note que a moeda não afeta nenhuma das variáveis reais do modelo. Logo, a moeda é neutra nesse modelo.

(4)

Podemos reescrever as restrições como:

(i) $$c_t + \underbrace{\frac{M_t}{P_t}}_{m_t} + q_t \cdot \underbrace{\frac{B_t}{P_t}}_{\overset{\shortparallel}{b_t}} \leq y_t + \tau_t + \underbrace{\frac{B_{t-1}}{P_{t-1}}}_{\overset{\shortparallel}{b_{t-1}}} \cdot \underbrace{\frac{P_{t-1}}{P_t}}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{1+\pi_t}}} + \underbrace{\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}}_{\overset{\shortparallel}{m_{t-1}}} \cdot \underbrace{\frac{P_{t-1}}{P_t}}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{1+\pi_t}}}$$

$$\Rightarrow \quad c_t + m_t + q_t \cdot b_t \leq y_t + \tau_t + \frac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} \quad //$$

(iv) $$\frac{T_t}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_t} + \frac{B_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_t} \leq \frac{M_t}{P_t} + q_t \cdot \frac{B_t}{P_t} \Rightarrow$$

$$\tau_t + m_{t-1} + \frac{b_{t-1}}{1+\pi_t} \leq m_t + q_t \cdot \frac{b_t}{1+\pi_t} \quad //$$

O Lagrangeano associado será dado por:

$$\mathcal{L} = E_t \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t, m_t) + \lambda_t \left[y_t + \tau_t + \frac{b_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} - c_t - m_t - q_t \cdot b_t \right] \right] \right\}$$

As Cpo's são:

$[c_t]$: $\beta^t \cdot u_c(t) - \lambda_t \cdot \beta^t \Rightarrow u_c(t) = \lambda_t$ (1)

$[m_t]$: $\beta^t \cdot u_m(t) - \lambda_t \cdot \beta^t + E_t\left\{\beta^{t+1} \cdot \frac{\lambda_{t+1}}{1+\pi_{t+1}}\right\} = 0$ (2)

$[b_t]$: $-\beta^t \cdot \lambda_t \cdot q_t + E_t\left\{\beta^{t+1} \cdot \lambda_{t+1} \cdot \frac{1}{1+\pi_{t+1}}\right\} = 0$ (3)

- Como de costume, a eq. (1) nos diz que o multiplicador de lagrange é igual a utilidade marginal do consumo. Esse é também o custo marginal de abrir mão de uma unidade infinitesimal de consumo.
- A eq. (2) que pode ser escrita como $\lambda_t = u_m(t) + E_t\left\{\frac{\lambda_{t+1}}{1+\pi_{t+1}}\right\}\beta^{t+1}$, nos diz que o custo marginal de abrir mão de uma unidade de consumo deve ser igual ao benefício marginal de reter moeda no presente somado ao valor presente esperado do consumo no próximo período.

A equação (3) nos diz que o valor do custo marginal de adquirir títulos no presente deve ser igual ao benefício marginal esperado do consumo no próximo período.

(B) Por (1) e (3):

$$q_t = E_t\left\{\beta \frac{u_c(t+1)}{u_c(t)} \cdot \frac{1}{(1+\pi_{t+1})}\right\} \quad (5)$$

Esse é a fórmula para a precificação do título. (Eq. de Euller).

pelo enunciado, $q_t = \frac{1}{1+i_t}$. usando isso em (5):

$$\frac{1}{1+i_t} = E_t\left\{\beta \cdot \frac{u_c(t+1)}{u_c(t)} \cdot \frac{1}{1+\pi_{t+1}}\right\} \Rightarrow \frac{u_c(t)}{\beta \cdot E_t\{u_c(t+1)\}} = \frac{1+i_t}{E_t\{1+\pi_{t+1}\}} \quad (6)$$

Usamos independencia entre $u_c(t+1)$ e π_{t+1}

Pela equação de fisher: $1+r_{t+1} = \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}$ logo, conseguimos escrever a taxa real de juros como função da utilidade marginal:

$$E_t\{1+r_{t+1}\} = \frac{u_c(t)}{\beta E_t\{u_c(t+1)\}} \quad (7)$$

- TMS do consumo por moeda:

De (1) e (2):

$$u_m(t) + E_t\left\{\beta \frac{u_c(t+1)}{1+\pi_{t+1}}\right\} = u_c(t) \quad (4)$$

De (6), temos: $u_c(t) = \beta \cdot E_t\left\{u_c(t+1) \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right\} \quad (6')$

Substituindo (6') em (4), teremos:

$$u_m(t) = \beta \cdot E_t\left\{u_c(t+1) \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right\} - \beta E_t\left\{\frac{u_c(t+1)}{1+\pi_{t+1}}\right\} = \underbrace{\beta \cdot E_t\left\{\frac{u_c(t+1)}{1+\pi_{t+1}}\right\}}_{\frac{u_c(t)}{1+i_t}}\left((1+i_t) - 1\right)$$

logo $$\frac{u_m(t)}{u_c(t)} = \frac{i_t}{1+i_t} \quad (8)$$

fl8

(c) Vamos assumir que $u(c_t, m_t) = \log c_t + \gamma \log m_t$

Em equilíbrio vale que $c_t = y_t$.

por (6')
$$\frac{1}{c_t} = \beta . E_t \left\{ \frac{1}{c_{t+1}} \cdot \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right) \right\} \quad (6'')$$

Como o processo $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ possui trajetoria exogena com taxa de crescimento constante, vale que:

$$\frac{y_t}{y_{t+1}} = \frac{1}{1+g} = \frac{1}{\bar{g}}$$

Logo pela eq. (6'') devemos ter:

$$1 = \beta . E_t \left\{ \frac{1}{\bar{g}} \cdot \left(\frac{\bar{i}_t}{\bar{\pi}_{t+1}} \right) \right\} \quad (9)$$

onde $\bar{i}_t \equiv 1+i_t$ e $\bar{\pi}_{t+1} = 1+\pi_{t+1}$.

Assim, de (9) obtemos: $\bar{i}_t = \beta^{-1} . \bar{g} . E_t \{\bar{\pi}_{t+1}\} \quad (9')$

A regra de juros usada pela autoridade monetaria é:

$$\bar{i}_t = \alpha_0 + \alpha_\pi . \bar{\pi}_t + \theta_t \quad (10)$$

Substituindo (9') em (10):

$$\beta^{-1} . \bar{g} . E_t \{\bar{\pi}_{t+1}\} = \alpha_0 + \alpha_\pi . \bar{\pi}_t + \theta_t \quad (11)$$

$$\Rightarrow \bar{\pi}_t = \frac{\bar{g}}{\beta . \alpha_\pi} . E_t \{\pi_{t+1}\} - \frac{\alpha_0}{\alpha_\pi} - \frac{1}{\alpha_\pi} \theta_t \quad (*), \forall t$$

Dessa forma,

$$\pi_{t+1} = \frac{\bar{g}}{\beta . \alpha_\pi} . E_{t+1}\{\pi_{t+2}\} - \frac{\alpha_0}{\alpha_\pi} - \frac{1}{\alpha_\pi} \theta_{t+1} \quad (**)$$

• Substituindo $(**)$ em $(*)$, temos:

$$\bar{\pi}_t = \frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\cdot E_t\left\{\frac{\bar{g}}{\beta\alpha_\pi} E_{t+1}\{\pi_{t+2}\} - \frac{\alpha_0}{\alpha_\pi} - \frac{1}{\alpha_\pi}\cdot\theta_{t+1}\right\} - \frac{\alpha_0}{\alpha_\pi} - \frac{1}{\alpha_\pi}\theta_t = \left(\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right)^2 E_t\{\pi_{t+2}\}$$

$$- \frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\cdot\frac{\alpha_0}{\alpha_\pi} - \frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\cdot\frac{1}{\alpha_\pi} E_t\{\theta_{t+1}\} - \frac{1}{\alpha_\pi}\theta_t - \frac{\alpha_0}{\alpha_\pi}.$$

• repetindo estas substituições de forma recursiva, até o período T, obtemos:

$$\bar{\pi}_t = \left(\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right)^T E_t\{\pi_{t+T}\} - \sum_{j=0}^{T}\left(\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right)^{j-1}\frac{\alpha_0}{\alpha_\pi} - \sum_{j=1}^{T}\left(\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right)^{j-1}\frac{1}{\alpha_\pi}\cdot E_t\{\theta_{t+i-1}\} \quad (12)$$

• Vamos tomar agora o limite da expressão (12), com $T\to\infty$. Para que tenhamos uma solução única e bem definida, é preciso que

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right)^T = 0.$$ Mas isso só ocorrerá se

$$\left|\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right| < 1. \quad (***)$$ ⇒ Essa é a restrição para solução única.

• Tomando o limite de (12), com $T\to\infty$, e assumindo que vale $(***)$, temos

$$\bar{\pi}_t = \underbrace{-\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right)^{j-1}\frac{\alpha_0}{\alpha_\pi}}_{(\star)} - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right)^{j-1}\frac{1}{\alpha_\pi} E_t\{\theta_{t+i-1}\}$$

• Note que $(\star)$ representa a soma infinita dos termos de uma série geométrica com razão $\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}$. A soma é dada por:

$S = \frac{a_1}{1-q}$, onde q é a razão e a_1 é o primeiro termo da sequência.

Assim, $$S = \frac{-\alpha_0/\alpha_\pi}{1-\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}} = \frac{-\alpha_0/\alpha_\pi}{\frac{\beta\cdot\alpha_\pi-\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}} = -\frac{\alpha_0}{\cancel{\alpha_\pi}}\cdot\frac{\beta\cdot\cancel{\alpha_\pi}}{(\beta\cdot\alpha_\pi-\bar{g})} = -\frac{\alpha_0\cdot\beta}{\beta\cdot\alpha_\pi-\bar{g}}$$

Assim, $$\boxed{\bar{\pi}_t = -\frac{\alpha_0\cdot\beta}{\beta\cdot\alpha_\pi-\bar{g}} - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{g}}{\beta\cdot\alpha_\pi}\right)^{j-1}\frac{1}{\alpha_\pi}\cdot E_t\{\theta_{t+i-1}\}} \quad (13)$$

(d) Conforme o enunciado, $\{\theta_t\}_t$ é i.i.d, com $\mathbb{E}_t\{\theta_{t+i}\}=0, \forall i>0$.

Dessa forma: $$\bar{\pi}_t = -\frac{\alpha_0.\beta}{\beta.\alpha_\pi - \bar{g}} - \frac{1}{\alpha_\pi}.\theta_t. \quad (14)$$

Note que se $\theta_t \uparrow \Rightarrow \downarrow \bar{\pi}_t$.

Assumindo que o processo gerador da Moeda é dado por

$M_t = \underbrace{(1+\rho_t)}_{\equiv \bar{\rho}_t}.M_{t-1} \Rightarrow \bar{\rho}_t = \frac{M_t}{M_{t-1}}$. Note que $\bar{\rho}_t$ é a taxa bruta de crescimento do estoque de Moeda, e que ρ_t é a taxa líquida.

Dessa forma, temos: $$\bar{\rho}_t = \frac{\frac{M_t}{P_t}.P_t}{\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}.P_{t-1}} = \frac{m_t}{m_{t-1}}.\underbrace{\frac{P_t}{P_{t-1}}}_{1+\pi_{t}} \Rightarrow$$

$$\bar{\rho}_t = \frac{m_t}{m_{t-1}}.(1+\pi_t) = \frac{m_t}{m_{t-1}}\bar{\pi}_t$$

Vamos substituir (14) em (15):

$$\bar{\rho}_t = \frac{m_t}{m_{t-1}}.\left(\frac{-\alpha_0.\beta}{\beta.\alpha_\pi-\bar{g}} - \frac{1}{\alpha_\pi}\theta_t\right)$$

Assim, $\uparrow \theta_t \Rightarrow \downarrow \bar{\pi}_t$ e $\downarrow \bar{\rho}_t$. Ocorre queda na taxa de crescimento da moeda.

Exercício 3)

A) O problema do agente representativo será:

$$\max_{\{C_t, N_t, M_t, S_{t+1}\}} \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot u\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right) \right\}$$

s.t. $P_t \cdot C_t + Q_t S_{t+1} + (1-Q_t) M_t \leq S_t + W_t N_t - T_t$

em termos reais:
$\iff$

$$C_t + \frac{Q_t}{P_t} S_{t+1} + (1-Q_t)\frac{M_t}{P_t} \leq \frac{S_t}{P_t} + \frac{W_t}{P_t} \cdot N_t - \frac{T_t}{P_t}$$

O lagrangeano associado será:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right) + \lambda_t \left(\frac{S_t}{P_t} + \frac{W_t}{P_t} \cdot N_t - \frac{T_t}{P_t} - C_t - \frac{Q_t}{P_t} \cdot S_{t+1} - (1-Q_t)\frac{M_t}{P_t} \right) \right] \right\}$$

- CPOs:

$[C_t]$: $u_c(t)\beta^t - \beta^t \lambda_t = 0 \Rightarrow \lambda_t = u_c(t)$ (1)

$\left[\frac{M_t}{P_t}\right]$: $u_{\frac{M}{P}}(t) \cdot \beta^t - \lambda_t \beta^t (1-Q_t) = 0 \Rightarrow u_{\frac{M}{P}}(t) = \lambda_t (1-Q_t)$ (2)

$[N_t]$: $u_N(t)\beta^t + \lambda_t \cdot \beta^t \frac{W_t}{P_t} = 0 \Rightarrow u_N(t) = -\lambda_t \cdot \frac{W_t}{P_t}$ (3)

$[S_{t+1}]$: $\mathbb{E}_t\left\{\beta^{t+1} \lambda_{t+1} \cdot \frac{1}{P_{t+1}}\right\} - \beta^t \lambda_t \frac{Q_t}{P_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t \cdot Q_t = \beta \cdot \left\{\lambda_{t+1} \cdot \frac{P_t}{P_{t+1}}\right\}$ (4)

- De (1) em (2): $\dfrac{u_{\frac{M}{P}}(t)}{u_c(t)} = (1-Q_t) = 1 - \exp(i_t) = i_t$ } TMS de consumo por moeda

- De (1) e (3): $\dfrac{u_N(t)}{u_c(t)} = -\dfrac{W_t}{P_t}$ } TMS de consumo por trabalho

- De (1) e (4): $u_c(t) = \beta \cdot \mathbb{E}_t \left\{ \dfrac{u_c(t+1)}{Q_t} \dfrac{1}{1+\pi_{t+1}} \right\} = \beta \cdot \mathbb{E}_t \left\{ u_c(t+1) \cdot \left(\dfrac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right) \right\}$

Equação de Euller do consumo.

Fl. 12

(B) O problema da firma será:

$$\max_{\{N_t\}} P_t . Y_t - W_t . N_t = P_t . A_t . N_t^{1-\alpha} - W_t . N_t$$

cpo:

$[N_t]$: $P_t . (1-\alpha) . A_t . N_t^{-\alpha} = W_t \Rightarrow \frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha) . A_t . N_t^{-\alpha}$ (5)

tomando o log de (5):

$$\log W_t - \log P_t = \log(1-\alpha) + \log A_t - \alpha . \log N_t \quad (6)$$

No steady-state (estado estacionário) as variáveis não mudam de valor, i.e, $X_t = X_{t-1} = X_{t-2} = \cdots = X_{t+n} = X$, $\forall n > 0$

Assim, pela equação (5), no s.s. deve valer que:

$\frac{W}{P} = (1-\alpha) . A . N^{-\alpha}$ (7). tomando o $\log(\cdot)$ de (7):

$$\log W - \log P = \log(1-\alpha) + \log A - \alpha . \log N \quad (8)$$

A equação em termos de desvios logarítmicos do s.s. é obtida subtraindo (6) de (5):

$$\underbrace{(\log W_t - \log W)}_{\hat{w}_t} - (\log P_t - \log P) = \cancel{\log(1-\alpha) - \log(1-\alpha)} + (\log A_t - \log A) - \alpha(\log N_t - \log N)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{w}_t - \hat{p}_t = \hat{a}_t - \alpha \hat{n}_t} \quad (9)$$

(c) usando $u\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right) = \frac{\left(C_t . \frac{M_t}{P_t}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$

- $u_C(t) = \left(C_t \cdot \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \cdot \frac{M_t}{P_t}$

- $u_{\frac{M}{P}}(t) = \left(C_t \cdot \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \cdot C_t$

- $u_N(t) = - N_t^{\varphi}$

* usando as relações encontradas no item (A)

- TMS moeda / Consumo:

$$\frac{u_{\frac{M}{P}}(t)}{u_C(t)} = (1-Q_t) \iff \frac{\left(\frac{C_t \cdot M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \cdot C_t}{\left(C_t \cdot \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \cdot \frac{M_t}{P_t}} = (1-Q_t) \iff C_t = \frac{M_t}{P_t}(1-Q_t)$$

$$\iff C_t = \frac{M_t}{P_t} \cdot i_t$$

- log-linearizando:

$$\log C_t = \log M_t - \log P_t + \log i_t \quad (*)$$

- No s.s

$$\log C = \log M - \log P + \log i \quad (**)$$

subtraindo (**) de (*):

$$(\log C_t - \log C) = (\log M_t - \log M) - (\log P_t - \log P) + (\log i_t - \log i)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{c}_t = \hat{m}_t - \hat{p}_t + \hat{i}_t} \quad (10)$$

- TMS consumo / trabalho:

$$\frac{u_N(t)}{u_C(t)} = -\frac{W_t}{P_t} \Rightarrow \frac{-N_t^{\varphi}}{\left(C_t \cdot \frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma} \cdot \frac{M_t}{P_t}} = -\frac{W_t}{P_t} \Rightarrow N^{\varphi} \cdot c_t^{\sigma} \left(\frac{P_t}{M_t}\right)^{1-\sigma} = \frac{W_t}{P_t}$$

- tomando o log(.)

$$\varphi \cdot \log N_t + \sigma \cdot \log C_t + (1-\sigma) \log P_t - (1-\sigma) \cdot \log M_t = \log W_t - \log P_t \ (*)$$

- No steady-state, vale que:

$$\varphi.\log N + \sigma.\log C + (1-\sigma).\log P - (1-\sigma)\log M = \log W - \log P \quad (**)$$

- Subtraindo (**) de (*):

$$\boxed{\varphi\,\hat{n}_t + \sigma.\hat{c}_t + (1-\sigma)\,\hat{p}_t - (1-\sigma)\,\hat{m}_t = \hat{w}_t - \hat{p}_t} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{w}_t - \hat{p}_t = \varphi\hat{n}_t + \sigma\hat{c}_t - (1-\sigma)\,\hat{m}^r_t} \quad (11')$$

- Equação de Euller:

$$Q_t = \beta.\mathbb{E}_t\left\{\frac{\left(C_{t+1}.\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}\right)^{-\sigma}.\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}}{\left(C_t.\frac{M_t}{P_t}\right)^{-\sigma}.\frac{M_t}{P_t}}.\frac{P_t}{P_{t+1}}\right\} \Rightarrow Q_t.C_t^{-\sigma}.M_t^{r\,1-\sigma} = \beta\mathbb{E}_t\left\{C_{t+1}^{-\sigma}.M_{t+1}^{r\,1-\sigma}.\frac{P_t}{P_{t+1}}\right\}$$

- tomando o $\log(.)$:

$$\log Q_t - \sigma.\log C_t + (1-\sigma).\log M^r_t = \log\beta - \sigma\mathbb{E}_t\{\log C_{t+1}\} + (1-\sigma)\mathbb{E}_t\{\log M^r_{t+1}\} + \log P_t - \mathbb{E}_t\{\log P_{t+1}\} \quad (*)$$

- tomando o log no s.s.:

$$\log Q - \sigma.\log C + (1-\sigma).\log M = \log\beta - \sigma\,\mathbb{E}_t\{\log C\} + (1-\sigma)\log P - \mathbb{E}\{\log P\} \quad (**)$$

- A forma de desvio será dada subtraindo (**) de (*):

$$\underbrace{(\log Q_t - \log Q)}_{\hat{i}_t} - \sigma.\hat{c}_t + (1-\sigma).\hat{m}^r_t = -\sigma.\mathbb{E}_t\{\hat{c}_{t+1}\} + (1-\sigma)\mathbb{E}_t\{\hat{m}^r_{t+1}\} + \hat{p}_t - \mathbb{E}_t\{\hat{p}_{t+1}\}$$

$$\hat{c}_t = \mathbb{E}_t\{\hat{c}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(-\hat{i}_t + (1-\sigma)\mathbb{E}_t\{\Delta\hat{m}^r_{t+1}\} - \mathbb{E}_t\{\hat{\pi}_{t+1}\}\right) \quad (12)$$

(d) usando:

$$\hat{w}_t - \hat{p}_t = \varphi \hat{n}_t + \sigma.\hat{c}_t - (1-\sigma)\hat{m}^r_t \quad (11')$$

$$\hat{w}_t - \hat{p}_t = \hat{a}_t - \alpha \hat{n}_t \quad (9)$$

Assim, temos:

$$\varphi \hat{n}_t + \sigma.\hat{c}_t - (1-\sigma)\hat{m}^r_t = \hat{a}_t - \alpha.\hat{n}_t \quad (*)$$

pela condição de market clearing $\hat{c}_t = \hat{y}_t$. (13)

Como $Y_t = A_t . N_t^{1-\alpha}$ => a equação log-linearizada é dada por:

$\hat{y}_t = \hat{a}_t + (1-\alpha).\hat{n}_t$ (14) (adotando procedimento análogo ao usado anteriormente)

Substituindo (13) em (*): $\varphi.\hat{n}_t + \sigma.\hat{y}_t - (1-\sigma)\hat{m}^r_t = \hat{a}_t - \alpha.\hat{n}_t$

=> por (14) => $\varphi.\hat{n}_t + \sigma(\hat{a}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t) - (1-\sigma)\hat{m}^r_t = \hat{a}_t - \alpha\hat{n}_t$

resolvendo para $\hat{n}_t$:

$$\hat{n}_t(\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha) = (1-\sigma).\hat{a}_t + (1-\sigma).\hat{m}^r_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{n}_t = \psi_n \hat{a}_t + \psi_n . \hat{m}^r_t} \quad (15), \text{ onde } \psi_n \equiv \frac{1-\sigma}{\varphi + \sigma(1-\alpha) + \alpha}$$

usando (15) em (14):

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + (1-\alpha)(\psi_n(\hat{a}_t + \hat{m}^r_t)) = (1 + (1-\alpha).\psi_n)\hat{a}_t + (1-\alpha)\psi_n.\hat{m}^r_t$$

definindo: $\psi_{y,a} \equiv 1 + (1-\alpha).\psi_n$

$\psi_{y,m} \equiv (1-\alpha).\psi_n$

$$\boxed{\hat{y}_t = \psi_{y,a}.\hat{a}_t + \psi_{y,m}\hat{m}^r_t} \quad (16)$$

* pelas equações (15) e (16), note que, agora a política monetária afeta variáveis reais. Dizemos que a política monetária não é neutra.