Professor: Fernando Veloso — Política Econômica
Monitor: Rodrigo Abreu — EPGE/FGV

3º Lista de Exercícios

Exercício 1. *Considere o modelo monetário clássico, no qual um agente representativo resolve o seguinte problema de otimização:*

$$\underset{\{c_t,m_t\}}{Máx}\ \mathbb{E}_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t.u(C_t,N_t)\right\},\quad com\ \beta\ \epsilon\ (0,1)$$

Sujeito à:

$$(i)\ \ P_t.C_t+Q_t.B_t\le\ \ B_{t-1}+W_t.N_t-T_t$$
$$(ii)\ \ C_t,B_t\ge 0$$
$$(iii)\ \ \lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_t\{B_T\}\ge 0\ (Non-Ponzi\ game\ condition)$$

Nesse problema, C_t *é o consumo,* N_t *é a oferta de trabalho,* B_t *representa a poupança do agente na forma de títulos livres de risco, que pagam 1 no vencimento e possuem preço contemporâneo é dado por* Q_t*. A taxa de retorno dos títulos é* i_t*. Dessa forma, o preço corrente do título é dado por* $Q_t=\frac{1}{1+i_t}$*. Note que* $-log(Q_t)=log(1+i_t)\approx i_t\ \ \Rightarrow Q_t\approx exp(-i_t)$*. Dessa forma, assuma que* $1-Q_t=1-exp(-i_t)=i_t$*. Ao longo do exercício, considere que esta aproximação vale com igualdade. O termo* T_t *representa transferências lump-sum, que podem ser positivas ou negativas. Ao resolver seu problema o agente toma* P_t*,* Q_t *e* W_t *como dado. Essa economia possui um contínuo de firmas idênticas que produzem o único bem de consumo dessa economia com função de produção:* $Y_t=A_tN_t^{1-\alpha}$*. Aqui,* N_t *representa a quantidade de trabalho demandada da firma,* A_t *representa o nível da tecnologia, que segue um processo estocástico exógeno. Diante do exposto, pede-se:*

a) *Usando o método do lagrangeano, derive as condições de otimalidade, associadas ao problema do consumidor e apresente uma interpretação econômica para estas.*

Assuma agora que a função de utilidade do agente representativo é dada por:

$$U(C_t,N_t)=\frac{(C_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}-\frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$$

b) *Escreva as condições de otimalidade do problema do consumidor considerando a função de utilidade acima. Usando a notação* $log(X_t)\equiv x_t$*, log-linearize tais condições em torno do steady-state estacionário. (Nesse exercício use as definições:* $log\beta\equiv\rho$ *e* $-log(Q_t)=i_t$*).*

c) *Escreva o problema de otimização da firma, derive sua condição de otimalidade. Usando a notação* $log(X_t) \equiv x_t$*, Log-linearize tal condição em torno do steady-state não estacionário.*

d) *Usando a condição de equilíbrio no mercado de bens,* $c_t = y_t$*, e uma expressão log-linearizada da função de produção encontre o produto e o nível de emprego de equilíbrio.*

e) *Usando a condição de equilíbrio no mercado de bens,* $c_t = y_t$*, e a equação de Euler para o consumo, encontre o processo de formação para a taxa real de juros* $r_t \equiv i_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\}$*.*

f) *Usando a definição* $\omega_t \equiv \frac{W_t}{P_t}$ *encontre o processo gerador do salário real de equilíbrio.*

g) *Considerando os valores de equilíbrio das variáveis reais obtidos nos itens anteriores, o que podemos dizer sobre a política monetária neste modelo?*

Exercício 2. *Considere um modelo de moeda na função utilidade. Nesse problema, um agente representativo resolve o seguinte problema de otimização:*

$$\underset{\{c_t, m_t\}}{Máx}\, \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t . u(c_t, m_t) \right\}, \quad com\; \beta \in (0,1)$$

Sujeito à:

$$(i)\;\; c_t + \frac{M_t}{P_t} + q_t . \frac{B_t}{P_t} \leq \;\; y_t + \tau_t + \frac{B_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_t}$$

$$(ii)\;\; c_t, M_t, B_t \geq 0$$

$$(iii)\;\; k_0 \; e \; M_0 \; são \; dados \; e \; B_0 = 0$$

Onde c_t *é o consumo contemporâneo,* B_t *representa o valor nominal de títulos de um período, que tem preço* q_t *em t e paga taxa de juros nominal* i_t*. Nessa economia, os títulos emitidos pelo governo são considerados ativos livre de risco. A cada t, o governo realiza transferências lump-sum* $\tau_t > 0$*, em termos reais, a única fonte de gastos. O governo se financia com a emissão de moeda* $\left(\frac{M_t}{P_t}\right)$ *e títulos de um período* $\left(\frac{B_t}{P_t}\right)$*. Assuma que o agente recebe uma dotação exógena* y_t*, que segue um processo determinístico com taxa de crescimento constante. Temos ainda que u(.,.) é estritamente crescente, estritamente côncavas e duas vezes continuamente diferenciáveis nos dois argumentos, com* $u'(0,.) = \infty$ *e* $u'(.,0) = \infty$ *.*

O governo escolhe $\{T_t, B_t, M_t\}$ *atendendo à seguinte restrição de recursos:*

$$\frac{T_t}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_t} + \frac{B_{t-1}}{P_t} \leq \frac{M_t}{P_t} + q_t . \frac{B_t}{P_t}, \qquad \forall t$$

Onde $\tau_t = \frac{T_t}{P_t}$ *e* $\{T_t, B_t, M_t\}$ *representam variáveis em termos per-capita. No modelo, as variáveis em letra minúsculas estão em termos reais, enquanto as variáveis em letra maiúscula são nominais. Note que* $m_t = \frac{M_t}{P_t}$*. Assim, o agente deriva utilidade de encaixes monetários reais. Diante do exposto, pede-se:*

(a) *Escreva o lagrangeano associado ao problema do consumidor, derive as condições de primeira ordem e apresente uma interpretação econômica para estas.*

(b) *Suponha que o preço do título é dado por* $q_t = \frac{1}{1+i_t}$*. Com base no item anterior, encontre a formula para a precificação desse título. Usando a equação de Fischer*[1]*, encontre uma expressão para a taxa real de juros do título. Encontre ainda uma relação para a taxa marginal de substituição de consumo por moeda.*

(c) *Assuma que as preferências dos agentes são do tipo:*

$$u(c_t, m_t) = u(c_t) + v(m_t), onde\ u(c_t) = log(c_t) \quad e \quad v(m_t) = \gamma . log(m_t)$$

Considere agora que o governo adota uma política monetária que regula a trajetória de $\{M_t\}_{t=0}^{\infty}$ *a fim de atender à seguinte regra de política monetária:*

$$\bar{\iota}_t = \alpha_0 + \alpha_\pi . \bar{\pi}_t + \theta_t, \qquad \alpha_0 > 0 \ e \ \mathbb{E}\{\theta_t\} = 0$$

Onde $\bar{\iota}_t = 1 + i_t$ *é a taxa nominal de juros na forma de fator,* $\bar{\pi}_t = 1 + \pi_t$ *é a taxa de inflação da economia, isto é,* $\bar{\pi}_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$*, e* θ_t *é uma variável aleatória que representa um choque exógeno de política monetária.*

Derive uma equação em diferenças cuja solução nos retorna a inflação de equilíbrio. Imponha restrições sobre o parâmetro de resposta de política à inflação (α_π) *a fim de que exista uma única solução para a inflação.*

(dica: você pode linearizar a equação em diferenças, se achar conveniente. Lembre-se que em equilíbrio $c_t = y_t$*, e que* y_t *cresce a uma taxa constante.)*

(d) *Se os choques exógenos de política monetária são i.i.d., qual é o impacto de um choque positivo (em* θ_t*) sobre a inflação? E sobre a taxa nominal de juros? E sobre o crescimento da oferta de moeda?*

---

[1] *A equação de Fischer é dada por:* $1 + r_{t+1} = \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}$*. Suponha nesse item que* $U_c(t+1)$ *é independente de* π_{t+1}*.*

Exercício 3. *Suponha que um agente representativo vive infinitos períodos e resolve o seguinte problema dinâmico de otimização:*

$$\underset{\left\{C_t, N_t, \frac{M_t}{P_t}, S_{t+1}\right\}}{Máx} \mathbb{E}_{t_0}\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t . U(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t)\right\}$$

$$S.t \qquad (i) \quad P_t . C_t + Q_t S_{t+1} + (1 - Q_t). M_t \leq S_t + W_t . N_t - T_t, \forall t$$

$$(ii) \quad \lim_{T \to \infty} \mathbb{E}_t\{S_T\} \geq 0 \; (Non - Ponzi\ game\ condition)$$

Nesse problema, C_t é o consumo, N_t é a oferta de trabalho, B_t representa a poupança do agente na forma de títulos livres de risco, que pagam 1 no vencimento e possuem preço contemporâneo é dado por Q_t. A taxa de retorno dos títulos é i_t. Dessa forma, o preço corrente do título é dado por $Q_t = \frac{1}{1+i_t}$. Note que $-log(Q_t) = log(1 + i_t) \approx i_t \Rightarrow Q_t \approx exp(-i_t)$. Dessa forma, assuma que $1 - Q_t = 1 - exp(-i_t) = i_t$. Ao longo do exercício, considere que esta aproximação vale com igualdade. O termo T_t representa transferências lump-sum, que podem ser positivas ou negativas. S_t representa a quantidade total de ativos financeiros que o agente possui em t, assim, $S_{t+1} = B_t + M_t$. Ao resolver seu problema o agente toma P_t, Q_t e W_t como dado. Essa economia possui um contínuo de firmas idênticas que produzem o único bem de consumo dessa economia com função de produção: $Y_t = A_t {N_t}^{1-\alpha}$. Aqui, N_t representa a quantidade de trabalho demandada da firma, A_t representa o nível da tecnologia, que segue o seguinte processo estocástico:

$$a_t = \rho_a . a_{t-1} + \varepsilon_t^a,\ onde\ \rho_a \in [0,1),\ \ a_t \equiv log(A_t),\ \varepsilon_t^a \sim \mathcal{N}(0,1), iid.$$

Ao longo do exercício, assumiremos que variáveis escritas em minúsculo estão em termos de logaritmo, enquanto variáveis em maiúsculos estão em nível.
Diante do exposto, pede-se:

(a) *Caracterize a solução do problema do consumidor, apresentando a equação de Euller do consumo, a taxa marginal de substituição do consumo por trabalho e a taxa marginal de substituição de consumo por moeda.*

(b) *Monte e resolva o problema da firma que escolhe trabalho. Log-linearize a condição de primeira ordem desse problema, isto é, reescreva a equação original em termos desvios logarítimicos[1] do steady-state.*

Assuma agora que a função de utilidade do agente é dada por:

$$U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t} N_t\right) = \frac{\left(C_t . \frac{M_t}{P_t}\right)^{1-\sigma}}{1 - \sigma} - \frac{{N_t}^{1+\varphi}}{1 + \varphi}$$

[1]*Lembre-se que:* $\hat{x}_t \equiv log(X_t) - log(X) \approx \frac{X_t - X}{X}$.

(c) *Escreva as condições otimalidade encontradas em (a) considerando a forma funcional apresentada para a função utilidade. Log-linearize essas equações isto é, reescreva as equações originais em termos desvios logarítmicos do steady-state.*

(d) *Usando as equações log-linearizadas obtidas em (b) e (c), juntamente com condição de equilíbrio no mercado de bens, encontre o produto de equilíbrio. Supondo que existe uma autoridade monetária controlando a taxa de juros, a política monetária é neutra?*