GABARITO DA LISTA 2 (P.E.C) RODRIGO ABREU EPGE/FGV

Questão 1)

(A)

Substituindo (5) em (2):

$$y_t^s = \beta\left(p_t - E_{t-1}\{p_t\} + \underbrace{\left(\frac{\alpha \cdot \gamma}{\delta+\gamma}\right)}_{\equiv\, a} E_{t-1}\{u_t\} - \lambda\left(p_t - E_{t-1}\{p_t\}\right) + u_t\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_t^s = \beta(1-\lambda).\left(p_t - E_{t-1}\{p_t\}\right) + \beta\left(u_t - aE_{t-1}\{u_t\}\right) \qquad (6)$$

- Usando a hipótese $v_t = 0 \Rightarrow y_t^d = m_t - p_t \quad (1')$
- Usando $E_{t-1}\{u_t\} = 0 \Rightarrow y_t^s = \beta(1-\lambda).\left(p_t - E_{t-1}\{p_t\}\right) + \beta.u_t \; (6')$

$\Rightarrow$ Considerando que no equilíbrio do mercado de bens temos $y_t^s = y_t^d = y_t$, podemos igualar (1') e (6'):

$$m_t - p_t = \beta(1-\lambda)\left(p_t - E_{t-1}\{p_t\}\right) + \beta.u_t$$

$$\Rightarrow \quad [1+\beta(1-\lambda)].p_t = m_t + \beta(1-\lambda)\,E_{t-1}\{p_t\} - \beta.u_t$$

$$\Rightarrow \quad p_t = \frac{m_t + \beta(1-\lambda).E_{t-1}\{p_t\} - \beta.u_t}{1+\beta(1-\lambda)} \qquad (7)$$

Substituindo (7) em (1), temos:

$$y_t = m_t - \left[\frac{m_t + \beta(1-\lambda).E_{t-1}\{p_t\} - \beta.u_t}{1+\beta(1-\lambda)}\right] \Rightarrow y_t = \frac{\beta}{1+\beta(1-\lambda)}.\left[(1-\lambda).m_t - (1-\lambda)E_{t-1}\{p_t\} + u_t\right] \qquad (8)$$

* Note que (7) e (8) não são soluções, pois dependem do operador $E_{t-1}\{p_t\}$. Aplicando $E_{t-1}\{.\}$ em (7), temos:

$$E_{t-1}\{p_t\} = \frac{\cancel{E_{t-1}\{m_t\}}^{0} + \beta(1-\lambda).E_{t-1}E_{t-1}\{p_t\} - \beta.\cancel{E_{t-1}\{u_t\}}^{0}}{1+\beta(1-\lambda)} = \frac{\beta(1-\lambda).E_{t-1}\{p_t\}}{1+\beta(1-\lambda)}$$

$\Rightarrow E_{t-1}\{p_t\} = 0.\ (9)$ Usando (9) em (7) e (8), temos:

$$\boxed{y_t = \frac{\beta}{1+\beta(1-\lambda)}\left[(1-\lambda)m_t + u_t\right]} \quad (10)$$

$$\boxed{p_t = \frac{m_t + \beta . u_t}{1+\beta(1-\lambda)}} \quad (11)$$

(B) Observe, a partir da eq (8), que se $\uparrow \lambda \Rightarrow [1+\beta(1-\lambda)]\downarrow$

Logo $\uparrow\left[\frac{1}{1+\beta(1-\lambda)}\right]$. Dessa forma, $\uparrow \frac{\partial p_t}{\partial m_t}$ e $\uparrow \frac{\partial p_t}{\partial u_t}$

Ou seja, quanto maior o grau de indexação, maior será o impacto de choques monetarios e de oferta sobre os preços.

(C) pela equação (7); note que se $\uparrow \lambda \Rightarrow \downarrow (1+\beta(1-\lambda)) \Rightarrow \uparrow \frac{1}{1+\beta(1+\lambda)}$

Logo $\uparrow \frac{\partial y_t}{\partial u_t}$, i.e., o produto se torna mais sensível a choques de oferta.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\beta(1-\lambda)}{1+\beta(1-\lambda)}\right] = \frac{-\beta(1+\beta(1-\lambda)) - \beta(1-\lambda).(-\beta)}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} = \frac{-\beta-\beta^2\cancel{(1-\lambda)}+\beta^2\cancel{(1-\lambda)}}{[1+\beta(1-\lambda)]^2} = \underbrace{\frac{-\beta}{[1+\beta(1-\lambda)]^2}}_{<0}$$

Assim, $\uparrow \lambda \Rightarrow \downarrow \frac{\beta(1-\lambda)}{1+\beta(1-\lambda)} \Rightarrow \downarrow \frac{\partial y_t}{\partial m_t}$.

Logo, o produto se torna menos sensível à choques monetarios.
Quanto maior $\lambda$, menor a possibilidade de ajuste no salário real diante de choques de oferta, o que amplifica seu efeito no emprego e no produto. Por outro lado quanto maior o $\lambda$, menor o efeito de choques monetarios no salario real, o que reduz seu impacto no emprego e produto.

Exercício 2)

A)

- Substituindo (3) em (1):

$$x_t = \frac{1}{2}\left(x_{t-1} + E_t\{x_{t+1}\}\right) + \gamma.\left[\beta_0 + \beta_1\left(m_t - p_t\right) + \vartheta_t\right] \quad (5)$$

- Substituindo (2) em (5), temos:

$$x_t = \frac{1}{2}\left(x_{t-1} + E_t\{x_{t+1}\}\right) + \gamma.\left[\beta_0 + \beta_1\left(m_t - \frac{1}{2}\left(x_t + x_{t-1}\right)\right) + \vartheta_t\right] \quad (6)$$

- Substituindo (4) em (6):

$$x_t = \frac{1}{2}\left(x_{t-1} + E_t\{x_{t+1}\}\right) + \gamma.\left[\beta_0 + \beta_1\left(\mu + e_t - \frac{1}{2}\left(x_t + x_{t-1}\right)\right) + \vartheta_t\right]$$

Multiplicando toda a equação acima por 2 e reorganizando os termos temos:

$$x_t = \frac{2.\gamma(\beta_0 + \beta_1.\mu)}{2 + \gamma.\beta_1} + \frac{(1 - \gamma.\beta_1)}{2 + \gamma.\beta_1}.x_{t-1} + \frac{1}{2 + \gamma.\beta_1}E_t\{x_{t+1}\} + \frac{2.\gamma.\beta_1}{2 + \gamma\beta_1}.e_t + \frac{2.\gamma}{2 + \gamma\beta_1}.\vartheta_t \quad (7)$$

Note que (7) é uma equação em diferenças estocástica e que o vetor de variáveis de estado associado é $(x_{t-1}, e_t, \vartheta_t)$. Dessa forma, vamos propor uma solução do tipo:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1.x_{t-1} + \phi_2.e_t + \phi_3.\vartheta_t \quad (8)$$

Adiantando (8) em 1 período, e aplicando o operador $E_t\{\cdot\}$, temos:

$$E_t\{x_{t+1}\} = \phi_0 + \phi_1.\underbrace{E_t\{x_t\}}_{= x_t} + \phi_2.E_t\{e_{t+1}\}^{0} + \phi_3.E_t\{\vartheta_{t+1}\}^{0}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_t\{x_{t+1}\} = \phi_0 + \phi_1 \cdot x_t$$

Substituindo (8) na eq. acima, temos:

$$\mathbb{E}_t\{x_{t+1}\} = \phi_0 + \phi_1\left(\phi_0 + \phi_1 \cdot x_{t-1} + \phi_2 . e_t + \phi_3 \cdot v_t\right) = \phi_0 + \phi_0 \cdot \phi_1 + \phi_1^2 \cdot x_{t-1} + \phi_1 . \phi_2 e_t + \phi_1 . \phi_3 v_t$$

(9)

Substituindo (8) e (9) em (7), temos:

$$\phi_0 + \phi_1 \cdot x_{t-1} + \phi_2 . e_t + \phi_3 . v_t = \frac{2 \cdot \gamma(\beta_0 + \beta_1 . \mu) + \phi_0 (1 + \phi_1)}{2 + \gamma . \beta_1} + \frac{(1 - \gamma . \beta_1 + \phi_1^2)}{2 + \gamma . \beta_1} . x_{t-1}$$

$$+ \frac{(2 \gamma . \beta_1 + \phi_1 . \phi_2)}{2 + \gamma . \beta_1} . e_t + \frac{2 . \gamma + \phi_1 . \phi_3}{2 + \gamma . \beta_1} . v_t \qquad (10)$$

(10) implica que $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ devem satisfazer ao seguinte sistema de equações:

$$[cte]: \phi_0 = \frac{2 . \gamma(\beta_0 + \beta_1 \mu) + \phi_0(1 + \phi_1)}{2 + \gamma . \beta_1} \qquad (11\,a)$$

$$[x_{t-1}]: \quad \phi_1 = \frac{1 - \gamma . \beta_1 + \phi_1^2}{2 + \gamma . \beta_1} \qquad (11\,b)$$

$$[e_t]: \quad \phi_2 = \frac{2 . \gamma . \beta_1 + \phi_1 . \phi_2}{2 + \gamma . \beta_1} \qquad (11\,c)$$

$$[v_t]: \quad \phi_3 = \frac{2 . \gamma + \phi_1 . \phi_3}{2 + \gamma \beta_1} \qquad (11\,d)$$

---

De (11b) temos:

$$\phi_1^2 - (2 + \gamma . \beta_1) . \phi_1 + (1 - \gamma \beta_1) = 0$$

$$\Delta = (2 + \gamma \beta_1)^2 - 4 . 1 . (1 - \gamma . \beta_1) \Rightarrow \phi_1 = \frac{+(2 + \gamma . \beta_1) \pm \sqrt{\Delta}}{2 . (1)}$$

temos as seguintes raízes $\phi_1^1 = \dfrac{z+\gamma\cdot\beta_1+\sqrt{\Delta}}{2} > 1 \Rightarrow$ solução instável

$\phi_1^2 = \dfrac{z+\gamma\cdot\beta_1-\sqrt{\Delta}}{2} < 1 \Rightarrow$ solução estável

faça $\boxed{\phi_1^* \equiv \phi_1^2.}$

- De (11.c) temos:

$$\phi_2\left((z+\gamma\beta_1)-\phi_1^*\right) = z\cdot\gamma\cdot\beta_1 \Rightarrow \boxed{\phi_2 = \frac{z\cdot\gamma\cdot\beta_1}{z+\gamma\cdot\beta_1-\phi_1^*}} \quad (13)$$

faça $\phi_2^* \equiv \phi_2$

- De (11.d):

$$\phi_3\left(z+\gamma\beta_1-\phi_1^*\right) = z\cdot\gamma \Rightarrow \boxed{\phi_3 = \frac{z\gamma}{z+\gamma\beta_1-\phi_1^*}} \quad (14)$$

faça $\phi_3^* \equiv \phi_3$

- De (11.a):

$$\phi_0\left(z+\gamma\beta_1-(1+\phi_1^*)\right) = z\cdot\gamma\cdot(\beta_0+\beta_1.\mu) \Rightarrow \boxed{\phi_0 = \frac{z\cdot\gamma\cdot(\beta_0+\beta_1.\mu)}{z+\gamma\cdot\beta_1-(1+\phi_1^*)}} \quad (15)$$

faça $\phi_0^* \equiv \phi_0$

Por fim, obtemos a solução:

$$\boxed{x_t = \phi_0^* + \phi_1^* x_{t-1} + \phi_2^* . e_t + \phi_3^* v_t} \quad (16)$$

(B) Usando o resultado do item anterior, obtemos o preço de equilíbrio.

$$p_t = \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1}) \quad (2)$$

Substituindo (16) em (2):

$$p_t = \frac{1}{2}\left[\phi_0^* + \phi_1^* x_{t-1} + \phi_2^* e_t + \phi_3^* \cdot v_t + \phi_0^* + \phi_1^* \cdot x_{t-2} + \phi_2^* \cdot e_{t-1} + \phi_3^* \cdot v_{t-1}\right]$$

$$\Rightarrow p_t = \phi_0^* + \phi_1^* \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(x_{t-1} + x_{t-2})}_{= p_{t-1}} + \phi_2^* \cdot \frac{1}{2}(e_t + e_{t-1}) + \phi_3^* \frac{1}{2}(v_t + v_{t-1})]$$

$$\Rightarrow \boxed{p_t = \phi_0^* + \phi_1^* \cdot p_{t-1} + \frac{\phi_2^*}{2} \cdot (e_t + e_{t-1}) + \frac{\phi_3^*}{2} \cdot (v_t + v_{t-1})} \quad (18)$$

Note que $p_{t-1}$ aparece em (18) na expressão do preço de equilíbrio. Isso nos mostra que o modelo de contratos justapostos de Taylor gera inércia no nível de preços. Essa inércia é decorrência direta da inércia dos contratos salariais.

(C) Por (1): $x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} + E_t\{x_{t+1}\}) + \gamma \cdot y_t$

$$\Rightarrow x_{t-1} = \frac{1}{2}(x_{t-2} + E_{t-1}\{x_t\}) + \gamma \cdot y_{t-1} \quad (19)$$

Substituindo (1) e (19) em (2):

$$p_t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_{t-1} + E_t\{x_{t+1}\}) + \gamma y_t + \frac{1}{2}(x_{t-2} + E_{t-1}\{x_t\} + \gamma \cdot y_{t-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\underbrace{(x_{t-1} + x_{t-2})}_{= p_{t-1}} + \gamma(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{E_t\{x_{t+1}\} + x_t}_{= E_t\{p_{t+1}\}} + E_{t-1}\{x_t\} - x_t)\right]$$

fazendo $\varepsilon_{pt} \equiv -\frac{1}{4}\left(x_t - E_{t-1}\{x_t\}\right) \Rightarrow$

$$p_t = \frac{1}{2}\left(p_{t-1} + E_t\{p_{t+1}\}\right) + \frac{\gamma}{2}\left(y_t + y_{t+1}\right) + \varepsilon_{pt} \quad (20)$$

onde $\varepsilon_{pt}$ é ruído branco. Podemos reescrever (20) como:

$$\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_t = \frac{1}{2}\left(p_{t-1} + E_t\{p_{t+1}\}\right) + \frac{\gamma}{2}\left(y_t + y_{t+1}\right) + \varepsilon_{pt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\left(p_t - p_{t-1}\right)}_{\equiv\ \pi_t} = \frac{1}{2}E_t\{\underbrace{p_{t+1} - p_t}_{\equiv\ \pi_{t+1}}\} + \frac{\gamma}{2}\left(y_t + y_{t+1}\right) + \varepsilon_{pt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + \gamma\left(y_t + y_{t+1}\right) + \varepsilon_{\pi t}} \quad (21)$$

, onde $\varepsilon_{\pi t} \equiv 2\varepsilon_{pt}$ e

$\varepsilon_{\pi t}$ é ruído branco.

Note que a curva de Phillips obtida a partir do modelo de Taylor não inclui a inflação passada.

Exercício 3) De (1'), temos:

$$x_t = \frac{1}{2}\left(x_{t-1} - p_{t-1} + \mathbb{E}_t\{x_{t+1} - p_{t+1}\}\right) + \gamma \cdot y_t + \underbrace{p_t}_{\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_t}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_{t-1} + \mathbb{E}_t\{x_{t+1}\}\right) + \gamma \cdot y_t + \frac{1}{2}\underbrace{(p_t - p_{t-1})}_{\pi_t} - \frac{1}{2}\mathbb{E}_t\{\underbrace{p_{t+1} - p_t}_{=\pi_{t+1}}\} \Rightarrow$$

$$x_t = \frac{1}{2}\left(x_{t-1} + \mathbb{E}_t\{x_{t+1}\}\right) + \gamma \cdot y_t + \frac{1}{2}\cdot \pi_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} \quad (*)$$

Vamos usar (*) em (2):

$$p_t = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\left(x_{t-1} + \mathbb{E}_t\{x_{t+1}\}\right) + \gamma \cdot y_t + \frac{1}{2}\pi_t - \frac{1}{2}\pi_{t+1} + \frac{1}{2}\left(x_{t-2} + \mathbb{E}_{t-1}\{x_t\}\right)$$
$$+ \gamma y_{t-1} + \frac{1}{2}\cdot \pi_{t-1} - \frac{1}{2}\pi_t\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\underbrace{(x_{t-1} + x_{t-2})}_{= p_{t-1}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\mathbb{E}_t\{x_{t+1} + x_t\}\right)}_{= \mathbb{E}_t\{p_{t+1}\}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\mathbb{E}_{t-1}\{x_t\} - x_t\right)}_{= \tilde{\varepsilon}_{p_t}} +$$
$$+ \gamma(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2}\left(\pi_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} + \pi_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}\{\pi_t\}\right)\Big]$$

$$\Rightarrow \underbrace{p_t}_{\frac{1}{2}p_t + \frac{1}{2}p_t} = \frac{1}{2}p_{t-1} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_t\{p_{t+1}\} + \frac{1}{2}\underbrace{\tilde{\varepsilon}_{p_t}}_{= \varepsilon_{p_t}} + \frac{\gamma}{2}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{4}\left(\pi_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} + \pi_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}\{\pi_t\}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}p_t - \frac{1}{2}p_{t-1}}_{= \pi_t} = \frac{1}{2}\mathbb{E}_t\{\underbrace{p_{t+1} - p_t}_{\pi_{t+1}}\} + \varepsilon_{p_t} + \frac{\gamma}{2}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{4}\left(\pi_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} + \pi_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}\{\pi_t\}\right)$$

---

$$\Rightarrow \pi_t = \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} + 2\varepsilon_{p_t} + \gamma(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2}\pi_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} + \frac{1}{2}\pi_{t-1} - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{t-1}\{\pi_t\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\pi_t = \frac{1}{2}\pi_{t-1} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} + \gamma(y_t + y_{t-1}) + 2\varepsilon_{p_t} - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{t-1}\{\pi_t\} \quad (**)$$

Somando $\frac{1}{2}\pi_t$ dos dois lados de $(**)$:

$$\pi_t = \frac{1}{2}\left(\pi_{t-1} + E_t\{\pi_{t+1}\}\right) + \gamma\cdot(y_t + y_{t-1}) + 2\varepsilon p_t - \frac{1}{2}E_{t-1}\{\pi_t\} + \frac{1}{2}\pi_t$$

Define

$$\varepsilon_{\pi_t} \equiv 2p_t - \frac{1}{2}E_{t-1}\{\pi_t\} + \frac{1}{2}\pi_t$$ . Logo:

$$\boxed{\pi_t = \frac{1}{2}\left(\pi_{t-1} + E_t\{\pi_{t+1}\}\right) + \gamma\left(y_t + y_{t-1}\right) + \varepsilon_{\pi_t}}$$

onde $\varepsilon_{\pi,t}$ é um ruído branco. Note que segundo a especificação do contrato salarial assumida por Fuhrer & Moore, a curva de Phillips passa a depender da inflação defasada.