1º Lista de Exercícios – Política Econômica EPGE / FGV

Monitor: Rodrigo Abreu fl1

Exercício 1)

Suponha que os processos estocásticos $\{\bar{y}_t, g_t, r^*_t, y^*_t \text{ e } v_t\}$ são ruído branco i.e., possuem o seguinte formato:

$\bar{y}_t = e^{\bar{y}}_t$

$g_t = e^{g}_t$

$r^*_t = e^{r^*}_t$

$y^*_t = e^{y^*}_t$

$v_t = e^{v}_t$

Onde $E\{e^i_{t+k}\} = 0, \ \forall k \geq 0, \ \forall i \in \{\bar{y}, g, r^*, y^*, v\} \equiv I$

$E\{(e^i_{t+k})^2\} = \sigma^2_i, \ \forall k \geq 0 \ . \ \forall i \in I$

$E\{e^i_{t+k} . e^i_t\} = 0, \ \forall k > 0, \ \forall i \in I$

Apresentamos acima a definição de ruído branco. (Média e variância constante, não autocorrelacionados)

A equação (3) pode ser escrita como:

$$q_t = \underbrace{\frac{-b_0}{b_2 - b_1}}_{\beta_0} - \underbrace{\frac{b_1}{b_2 - b_1}}_{\beta_1} . q^e_{t+1} + \underbrace{\frac{1}{b_2 - b_1}}_{\beta_2} . \bar{y}_t - \underbrace{\frac{b_1}{b_2 - b_1}}_{\beta_1} . r^*_t - \underbrace{\frac{b_3}{b_2 - b_1}}_{\beta_3} . g_t - \underbrace{\frac{b_4}{b_2 - b_1}}_{\beta_4} . y^*_t - \underbrace{\frac{1}{b_2 - b_1}}_{-\beta_2} . v_t \quad (3)$$

=> Usando as definições acima, considerando que as expectativas em relação ao câmbio futuro são racionais, teremos:

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 . E_t\{q_{t+1}\} + \beta_2 \bar{y}_t + \beta_1 . r^*_t + \beta_3 . g_t + \beta_4 . y^*_t - \beta_2 v_t \quad (3.1)$$

Usando as definições do ruído branco:

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 . E_t\{q_{t+1}\} + \beta_2 . e^{\bar{y}}_t + \beta_1 . e^{r^*}_t + \beta_3 . e^{g}_t + \beta_4 . e^{y^*}_t - \beta_2 . e^{v}_t \quad (3.2)$$

Conjecturamos que uma solução para (3.2) é da forma:

$$q_t = \phi_0 + \phi_1 . e_t^{\bar{y}} + \phi_2 . e_t^{r^*} + \phi_3 . e_t^{g} + \phi_4 . e_t^{y^*} + \phi_5 . e_t^{v} \quad (3.3)$$

Adiantando (3.3) e tomando a esperança condicional em t, temos:

$$E_t\{q_{t+1}\} = \phi_0 \ (3.4), \text{ pois } E_t\{e_{t+k}^{i}\} = 0, \ \forall k>0, \ \forall i \in I$$

- Nosso objetivo é encontrar os coeficientes $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}$. Para isso, substituimos (3.4) e (3.3) são substituídos em (3.2):

$$\phi_0 + \phi_1 . e_t^{\bar{y}} + \phi_2 . e_t^{r^*} + \phi_3 . e_t^{g} + \phi_4 . e_t^{y^*} + \phi_5 . e_t^{v} = \beta_0 + \beta_1 . \phi_0 + \beta_2 . e_t^{\bar{y}} + \beta_1 . e_t^{r^*}$$
$$+ \beta_3 . e_t^{g} + \beta_4 . e_t^{y^*} - \beta_2 . e_t^{v}$$

As equações do sistema são:

$$\phi_0 = \beta_0 + \beta_1 . \phi_0 \Rightarrow \phi_0(1-\beta_1) = \beta_0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}$$
$$\phi_1 = \beta_2$$
$$\phi_2 = \beta_1$$
$$\phi_3 = \beta_3$$
$$\phi_4 = \beta_4$$
$$\phi_5 = -\beta_2$$

Assim, substituindo em (3.3):

$$\boxed{q_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \beta_2 . e_t^{\bar{y}} + \beta_1 . e_t^{r^*} + \beta_3 . e_t^{g} + \beta_4 . e_t^{y^*} - \beta_2 e_t^{v}} \quad (3.5)$$

Vamos mostrar que (3.5) é ruído branco:

$$E\{q_t\} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}$$

$$VAR(q_t) = \beta_2^2 . \sigma_{\bar{y}}^2 + \beta_1^2 . \sigma_{r^*}^2 + \beta_3^2 . \sigma_g^2 + \beta_4^2 . \sigma_{y^*}^2 - \beta_2^2 . \sigma_v^2$$

- Estamos assumindo aqui que os ruídos brancos $\{e_t^{\bar{y}}, e_t^{r^*}, e_t^{g}, e_t^{y^*}, e_t^{v}\}$ são não correlacionados entre si, i.e, $E\{e_t^{i} . e_t^{j}\} = 0, \ \forall i,j \in I$.
- Como todos os ruídos brancos são não autocorrelacionados entre si, do ponto de vista temporal, então q_t também não será ↪

Isto é, $E\{q_t \cdot q_{t+k}\} = 0, \ \forall k > 0$

logo, a taxa de cambio real de equilíbrio é um ruído branco.

Exercício 2)

Definindo $\{\bar{y}_t, q_t, r_t^*, y_t^*, v_t\}$ como passeio aleatório;

$$\bar{y}_t = 1.\bar{y}_{t-1} + e_t^{\bar{y}} \Rightarrow \Delta \bar{y}_t = e_t^{\bar{y}}$$

$$q_t = q_{t-1} + e_t^{q} \Rightarrow \Delta q_t = e_t^{q}$$

$$r_t^* = r_{t-1}^* + e_t^{r^*} \Rightarrow \Delta r_t^* = e_t^{r^*}$$

$$y_t^* = y_{t-1}^* + e_t^{y^*} \Rightarrow \Delta y_t^* = e_t^{y^*}$$

$$v_t = v_{t-1} + e_t^{v} \Rightarrow \Delta v_t = e_t^{v}$$

Onde $\{e_t^{\bar{y}}, e_t^{q}, e_t^{r^*}, e_t^{y^*}, e_t^{v}\}$ são ruído branco.

Usando a equação (3.1) do exercício anterior, temos que:

$$q_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 . E_{t-1}\{q_t\} + \beta_2 . \bar{y}_{t-1} + \beta_1 . r_{t-1}^* + \beta_3 . q_{t-1} + \beta_4 . y_{t-1}^* - \beta_2 . v_{t-1}$$

fazendo a primeira diferença, temos:

$$\Delta q_t = q_t - q_{t-1} = \beta_1 . (\underbrace{E_t\{q_{t+1}\} - E_{t-1}\{q_t\}}_{E_t\{\Delta q_{t+1}\}}) + \beta_2 . \Delta \bar{y}_t + \beta_1 . \Delta r_t^* + \beta_3 . \Delta q_t + \beta_4 . \Delta y_t^* - \beta_2 . \Delta v_t \quad (2.1)$$

Substituindo as definições de ruído branco acima apresentadas, temos:

$$\Delta q_t = \beta_1 . E_t\{\Delta q_{t+1}\} + \beta_2 . e_t^{\bar{y}} + \beta_1 . e_t^{r^*} + \beta_3 . e_t^{q} + \beta_4 . e_t^{y^*} - \beta_2 . e_t^{v} \quad (2.2)$$

Vamos conjecturar o seguinte formato para o equilíbrio em expectativas racionais:

$$\Delta q_t = \phi_0 + \phi_1 . e_t^{\bar{y}} + \phi_2 . e_t^{r^*} + \phi_3 . e_t^{q} + \phi_4 . e_t^{y^*} + \phi_5 . e_t^{v} \quad (2.3)$$

Adiantando (2.3) em um período e tirando a esperança, temos:

$$E_t\{\Delta q_{t+1}\} = \phi_0 \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.2), temos:

fl.4

$$\phi_0 + \phi_1 . e_t^{\bar{y}} + \phi_2 . e_t^{r^*} + \phi_3 . e_t^{q} + \phi_4 . e_t^{y^*} + \phi_5 . e_t^{v} = \beta_1 . \phi_0 + \beta_2 . e_t^{\bar{y}} + \beta_1 . e_t^{r^*} + \beta_3 . e_t^{q} + \beta_4 . e_t^{y^*} - \beta_2 . e_t^{v}$$

$$\Rightarrow \phi_0 = \beta_1 . \phi_0 \Rightarrow \phi_0 . (1 - \beta_1) = 0 \Leftrightarrow \phi_0 = 0$$

$\phi_1 = \beta_2$

$\phi_2 = \beta_1$

$\phi_3 = \beta_3$

$\phi_4 = \beta_4$

$\phi_5 = -\beta_2$

Dessa forma, a solução de equilíbrio será:

$$\Delta q_t = \beta_2 . e_t^{\bar{y}} + \beta_1 . e_t^{r^*} + \beta_3 . e_t^{q} + \beta_4 . e_t^{y^*} - \beta_2 . e_t^{v} \quad (2.5.)$$

Por argumentos análogos aos do exercício anterior, concluímos que $\{\Delta q_t\}_t$ é um ruído branco. Logo, $\{q_t\}_t$ é um passeio aleatório.

Exercício 3)

- Como vimos em aula, se $p_t = \bar{p}_t \Rightarrow y_t = \bar{y}$ (3.1) (Isso quer dizer que os agentes acertam a previsão do preço que equilibra os mercados.
- Estamos adotando as hipóteses simplificadoras da Seção 8.9:

$$p^*_t = 0 \;;\; r^*_t = q_t = y^*_t = 0$$

logo, pela definição de câmbio real;

$$q_t = s_t - (p_t - p^*_t) \Rightarrow p_t = s_t - q_t \quad (3.2)$$

A relação LM será:

$$m_t - p_t = c_0 + c_1 . y_t + c_2 \left(E_t \{s_{t+1}\} - s_t \right) + \varepsilon_t \quad (3.3)$$

Usando (3.2) e (3.1) em (3.3), temos:

$$m_t - (s_t - q_t) = c_0 + c_1 . \bar{y} + c_2 \left(E_t \{s_{t+1}\} - s_t \right) + \varepsilon_t \quad (3.4)$$

Defina $\mu_t \equiv -q_t + c_1 . \bar{y} + \varepsilon_t$ (3.5)

Logo, (3.4) passa a ser:

$m_t - s_t = c_0 + c_2 \cdot \left[\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} - s_t \right] + u_t \Rightarrow$

$c_0 + c_2 \cdot E_t\{s_{t+1}\} + (1-c_2) \cdot s_t + u_t = m_t$

Usando $m_t = \mu_0 + m_{t-1} + e_t$ (3.6)

$$c_0 + c_2 \cdot \mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} + (1-c_2) s_t + u_t = \mu_0 + m_{t-1} + e_t \quad (3.7)$$

Conjecturando como solução:

$s_t = \phi_0 + \phi_1 \cdot m_{t-1} + \phi_2 \cdot e_t + \phi_3 \cdot u_t$ (3.8)

$\Rightarrow$ (3.8) adiantado em 1 período, $\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} = \phi_0 + \phi_1 \cdot m_t = \phi_0 + \phi_1(\mu_0 + m_{t-1} + e_t)$ (3.9)

Substituindo (3.8) e (3.9) em (3.7):

$c_0 + c_2 \cdot \phi_0 + c_2 \cdot \phi_1 \cdot \mu_0 + c_2 \cdot \phi_1 \cdot m_{t-1} + c_2 \cdot \phi_1 \cdot e_t + (1-c_2) \cdot \phi_0 + (1-c_2) \cdot \phi_1 m_{t-1} + (1-c_2) \cdot \phi_2 e_t$
$+ (1-c_2) \cdot \phi_3 \cdot u_t + u_t = \mu_0 + m_{t-1} + e_t$

Assim,

$c_0 + c_2 \cdot \phi_0 + c_2 \cdot \phi_1 \cdot \mu_0 + (1-c_2) \cdot \phi_0 = \mu_0 \Rightarrow \phi_0 = (1 - c_2 \cdot \phi_1) \cdot \mu_0 - c_0$

$c_2 \cdot \phi_1 + (1-c_2) \cdot \phi_1 = 1 \Rightarrow \phi_1 = 1$ //

$c_2 \cdot \phi_1 + (1-c_2) \cdot \phi_2 = 1 \Rightarrow \phi_2 = \frac{1 - c_2 \cdot \phi_1}{1-c_2} = \frac{1-c_2}{1-c_2} = 1$ //

$(1-c_2) \cdot \phi_3 + 1 = 0 \Rightarrow \phi_3 = -\frac{1}{1-c_2}$ // e $\phi_0 = (1-c_2) \cdot \mu_0 - c_0$ //

Substituindo em (3.8): $\boxed{s_t = (1-c_2) \cdot \mu_0 - c_0 + 1 \cdot m_{t-1} + 1 \cdot e_t - \frac{1}{1-c_2} \cdot u_t}$ (3.10)

Como vimos, $\bar{p}_t = s_t - q_t$, por (3.2). Usando (3.5) e (3.10)

obtemos: $\bar{p}_t = s_t - c_1 \cdot \bar{y} - \varepsilon_t - u_t = - c_0 - c_2 \cdot \mu_0 + \mu_0 + m_{t-1} + e_t - \frac{1}{1-c_2} u_t$
$- c_1 \cdot \bar{y} - \varepsilon_t - u_t.$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{p}_t = - c_0 - c_2 \cdot \mu_0 + m_t - c_1 \cdot \bar{y} - \varepsilon_t - \left(\frac{2-c_2}{1-c_2}\right) \cdot u_t} \quad (3.11)$$

Exercício 4)

Considerando a eq. (3.11) do exercício anterior, e assumindo que $\mathbb{E}_{t-1}\{u_t\}=0$, temos

$$\underbrace{\mathbb{E}_{t-1}\{\bar{p}_t\}}_{p_t} = -c_0 - c_2.\mu_0 + \mathbb{E}_{t-1}\{\mu_0 + m_{t-1} + e_t\} - c_1.\bar{y} - \mathbb{E}_{t-1}\{\varepsilon_{t-1} + \varsigma_t\}$$

$$\Rightarrow p_t = -c_0 - c_2.\mu_0 + \mu_0 + m_{t-1} - c_1.\bar{y} - \varepsilon_{t-1} \qquad (4.1)$$

No texto, McCallum redefine: $\tilde{m}_{t-1} \equiv m_{t-1} - \varepsilon_{t-1}$

$\Rightarrow$ substituindo (51) em (52):

$$\tilde{m}_t - p_t = c_0 + c_1.b_0 + c_1.b_1\left[\left(\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} - s_t\right) - \left(\mathbb{E}_t\{p_{t+1}\} - p_t\right)\right] + c_1.b_2(s_t - p_t)$$
$$+ c_1.v_t + c_2.\left(\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} - s_t\right) \qquad (4.2)$$

Por (4.1): $\mathbb{E}_t\{p_{t+1}\} - p_t = -\cancel{c_0} - \cancel{c_2.\mu_0} + \cancel{\mu_0} + \mathbb{E}_t\{\mu_0 + \cancel{m_{t-1}} + e_t\} - \cancel{c_1.\bar{y}} - \mathbb{E}_t\{\varepsilon_{t-1} + \varsigma_t\}$
$+ \cancel{c_0} + \cancel{c_2.\mu_0} - \cancel{\mu_0} - \cancel{m_{t-1}} + \cancel{c_1.\bar{y}} + \cancel{\varepsilon_{t-1}} = \mu_0 + e_t \qquad (4.3)$

$\Rightarrow$ Substituindo (4.3) e (4.1) em (4.2), temos:

$$\tilde{m}_t + c_0 + c_2.\mu_0 - \mu_0 - \tilde{m}_{t-1} + c_1.\bar{y} = c_0 + c_1.b_0 + c_1.b_1.\left[\left(\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} - s_t\right) - \mu_0 - e_t\right]$$
$$+ c_1.b_2.\left(s_t + c_0 + c_2.\mu_0 - \mu_0 + \tilde{m}_{t-1} + c_1\bar{y}\right) + c_1 v_t + c_2.\left(\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} - s_t\right) \qquad (4.4)$$

$\Rightarrow$ As variáveis de estado associadas a equação acima são: $\{\tilde{m}_{t-1}, e_t, v_t\}$. Logo, podemos conjecturar a solução:

$$s_t = \phi_0 + \phi_1.m_{t-1} + \phi_2.e_t + \phi_3.v_t \qquad (4.5)$$

$\Rightarrow$ Tirando $\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\}$ em (4.5):

$$\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} = \phi_0 + \phi_1.\mathbb{E}_t\{m_t\} + \phi_3.\mathbb{E}_t\{v_t + \zeta_t\} = \phi_0 + \phi_1(\mu_0 + m_{t-1} + e_t) + \phi_3.v_t \quad (4.6)$$

$\Rightarrow$ Aplicando (4.6) e (4.5) em (4.4); fazendo simplificações possíveis:

$$e_t + \mu_0.c_2 + c_1.\bar{y} = c_1.b_0 + c_1.b_1(\phi_1.\mu_0 + \phi_1.e_t - \phi_2.e_t - \mu_0 - e_t) + c_1.b_2(\phi_0 + \phi_1.m_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3.v_t + \mu_0 c_2 + c_0 - \mu_0 - m_{t-1} + c_1.\bar{y}) + c_1.v_t + c_2(\phi_1.\mu_0 + (\phi_1 - \phi_2).e_t)$$

Isso resulta nas seguintes equações:

$[c_{te}]$: $\mu_0.c_2 + c_1.\bar{y} = c_1.b_0 + c_1.b_1\mu_0(\phi_1 - 1) + c_1.b_2(\phi_0 + \mu_0 c_2 + c_0 - \mu_0 + c_1.\bar{y}) + c_2\phi_1.\mu_0$

$[e_t]$: $c_1.b_1.(\phi_1 - \phi_2) - c_1.b_1 + c_1.b_2.\phi_2 + c_2(\phi_1 - \phi_2) = 1$

$[m_{t-1}]$: $c_1.b_2(\phi_1 - 1) = 0$

$[v_t]$: $c_1.b_2.\phi_3 + c_1 = 0$

Solução para os parâmetros:

$[\phi_1]$: $c_1.b_2(\phi_1 - 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\phi_1 = 1}$

$[\phi_3]$: $c_1.b_2.\phi_3 + c_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\phi_3 = -\frac{1}{b_2}}$

$[\phi_2]$: $c_1.b_1(1 - \phi_2) - c_1.b_1 + c_1.b_2\phi_2 + c_2(1 - \phi_2) = 1$

$$-c_1.b_1.\phi_2 + c_1 b_2.\phi_2 + c_2 - c_2.\phi_2 = 1 \Rightarrow -\phi_2(c_1.b_1 - c_1 b_2 + c_2) = 1 - c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_2 = -\frac{1 - c_2}{c_1(b_1 - b_2) + c_2}}$$

$[\phi_0]$: $\mu_0 c_2 + c_1.\bar{y} - c_1.b_0 - c_1.b_2(\mu_0(c_2 - 1) + c_0 + c_1.\bar{y}) - c_2.\mu_0 = c_1.b_2.\phi_0$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_0 = \frac{\bar{y} - b_0 - b_2[\mu_0(c_2 - 1) + c_0 + c_1.\bar{y}]}{b_2} \equiv \gamma_0}$$

$\Rightarrow$ "Plugando" os ϕ's em (4.5):

$$\boxed{s_t = \gamma_0 + m_{t-1} + \frac{1 - c_2}{c_1(b_2 - b_1) - c_2}.e_t - \frac{1}{b_2}v_t} \quad (4.7)$$

$\Rightarrow$ Com a taxa de câmbio de equilíbrio, usaremos a relação LM para obter o produto de equilíbrio.

18

⇒ Adiantando (4.7) em um período e tirando a esperança condicional a $t-1$, note que:

$$\mathbb{E}_t\{s_{t+1}\} - s_t = \cancel{\gamma_0} + \mathbb{E}_t\{\cancel{m_{t-1}} + \mu_0 + e_t\} + \frac{1-c_2}{c_1(b_2-b_1)-c_2} \cdot \mathbb{E}_t\{\cancel{e_{t+1}}^{0}\} - \frac{1}{b_2} \mathbb{E}_t\{\cancel{v_t + \xi_{t+1}}\}$$

$$- \cancel{\gamma_0} - \cancel{m_{t-1}} - \frac{1-c_2}{c_1(b_2-b_1)-c_2} \cdot e_t + \cancel{\frac{1}{2} v_t} = \mu_0 + e_t - \frac{1-c_2}{c_1(b_2-b_1)-c_2} \cdot e_t \qquad (4.8)$$

⇒ Vamos usar o preço de equilíbrio obtido no exercício anterior;

$$p_t = -\mu_0 \cdot c_2 - c_0 - c_1 \cdot \bar{y} + \mu_0 + \underbrace{m_{t-1} - \varepsilon_{t-1}}_{\tilde{m}_{t-1}} \qquad (4.9)$$

⇒ Substituindo (4.8) e (4.9) na relação LM (52), temos

$$m_t + \cancel{\mu_0} \cdot c_2 + \cancel{c_0} + c_1 \cdot \bar{y} - \mu_0 - \tilde{m}_{t-1} = \cancel{c_0} + c_1 \cdot y_t + c_2\left(\cancel{\mu_0} + e_t - \frac{1-c_2}{c_1(b_2-b_1)-c_2} \cdot e_t\right) + \varepsilon_t$$

como $\tilde{m}_t = \mu_0 + \tilde{m}_{t-1} + e_t$; temos

$$c_1 \cdot \bar{y} + e_t = c_1 \cdot y_t + c_2\left(1 - \frac{(1-c_2)}{c_1(b_2-b_1)-c_2}\right) \cdot e_t$$

$$\Rightarrow \boxed{y_t = \bar{y} + \frac{1}{c_1}\left[1 - c_2\left(1 - \frac{(1-c_2)}{c_1(b_2-b_1)-c_2}\right)\right] e_t} \qquad (4.10)$$

note que $h_t = y_t - \bar{y} = \frac{1}{c_1}\left[1 - c_2\left(1 - \frac{1-c_2}{c_1(b_2-b_1)-c_2}\right)\right] \cdot e_t$

↳ o hiato do produto é proporcional aos choques monetários.

Exercício 5)

⇒ Partindo da equação (2), use (3).

$$m_t - p_t = b.y_t - c.\left[r_t + (E_t\{p_{t+1}\} - p_t)\right] + v_t \quad (5.1)$$

⇒ usando (1) em (5.1): $r_t = -\frac{1}{a}.y_t + \frac{u_t}{a}$

$$m_t - p_t = b.y_t - c\left[-\frac{1}{a}y_t + \frac{u_t}{a} + (E_t\{p_{t+1}\} - p_t)\right] + v_t$$

$$\Rightarrow m_t - p_t = b.\left(y^* + \alpha.[p_t - E_{t-1}\{p_t\}]\right) - c\left[\frac{u_t}{a} - \frac{1}{a}\left(y^* + \alpha[p_t - E_{t-1}\{p_t\}]\right) + (E_t\{p_{t+1}\} - p_t)\right] + v_t \Rightarrow$$

$$m_t - p_t(1+c) = y^*\left(b + \frac{c}{a}\right) + \left(p_t - E_{t-1}\{p_t\}\right)\left(\alpha.b + \frac{c.\alpha}{a}\right) - \frac{c}{a}.u_t + v_t - c.E_t\{p_{t+1}\}$$

$$\Rightarrow p_t = \frac{1}{1+c}.m_t - \frac{1}{1+c}\left(b + \frac{c}{a}\right).y^* + \frac{1}{1+c}\left(\alpha b + \frac{c.\alpha}{a}\right)\left(E_{t-1}\{p_t\} - p_t\right) + \frac{1}{1+c}\left(\frac{c}{a}u_t - v_t\right) + \frac{c}{1+c}.E_t\{p_{t+1}\}$$

Defina agora:

$$\gamma \equiv \frac{1}{1+c}\left(b + \frac{c}{a}\right)$$

$$\beta \equiv \frac{1}{1+c}\left(\alpha.b + \frac{c.\alpha}{a}\right)$$

$$w_t \equiv \frac{1}{1+c}\left(\frac{c}{a}u_t - v_t\right)$$

Logo, obtemos:

$$p_t = \frac{1}{1+c}m_t - \gamma.y^* + \beta\left(E_{t-1}\{p_t\} - p_t\right) + w_t + \frac{c}{1+c}.E_t\{p_{t+1}\} \quad (5.2)$$

como $m_t = m_{t-1} + \phi_t$; As variáveis de estado associadas à (5.2) são: $\{m_{t-1}, \phi_t, w_t\}$.

⇒ podemos conjecturar uma solução do tipo:

$$p_t = q_0 + q_1.m_{t-1} + q_2.w_t + q_3.\phi_t \quad (5.3)$$

⇒ tome a esperança de (5.3) em relação à t-1:

$$E_{t-1}\{p_t\} = q_0 + q_1 . m_{t-1} \quad (5.4) \quad \text{pois} \begin{cases} E_{t-1}\{w_t\}=0 \\ E_{t-1}\{\phi_t\}=0 \end{cases}$$

⇒ Adiantemos (5.3) em 1 período, e tomemos a esperança com relação à t:

$$E_t\{p_{t+1}\} = q_0 + q_1 . E_t\{m_{t-1}+\phi_t\} = q_0 + q_1 m_{t-1} + q_1 . \phi_t \quad (5.5)$$

Assim, usando (5.3) e (5.4), temos:

$$E_{t-1}\{p_t\} - p_t = \cancel{q_0} - \cancel{q_1 m_{t-1}} - \cancel{q_0} - \cancel{q_1 m_{t-1}} - q_2 . w_t - q_3 . \phi_t = -q_2 . w_t - q_3 . \phi_t \quad (5.6)$$

Substituindo esses resultados em (5.2):

$$p_t = \frac{1}{1+c} . m_{t-1} + \frac{1}{1+c} . \phi_t - \gamma . y^* + \beta . \left(-q_2 . w_t - q_3 . \phi_t\right) + w_t + \frac{c}{1+c}\left(q_0 + q_1 . m_{t-1} + q_1 . \phi_t\right)$$

$$= q_0 + q_1 . m_{t-1} + q_2 . w_t + q_3 . \phi_t \quad (5.7)$$

⇒ De (5.7) temos as seguintes equações para os coeficientes:

[cte]: $-\gamma . y^* + \frac{c . q_0}{1+c} = q_0 \Rightarrow q_0\left(\frac{c}{1+c} - 1\right) = -\gamma . y^* \Rightarrow q_0 = (1+c) . \gamma . y^*$

[m_{t-1}]: $\frac{1}{1+c} + q_1 . \frac{c}{1+c} = q_1 \Rightarrow \frac{1}{1+c} = q_1\left(1 - \frac{c}{1+c}\right) = q_1\left(\frac{1+c-c}{1+c}\right) \Rightarrow q_1 = 1$ //

[ϕ_t]: $\frac{1}{1+c} - \beta . q_3 + \frac{c . q_1}{1+c} = q_3 \Rightarrow 1 = q_3(1+\beta) \Rightarrow q_3 = \frac{1}{1+\beta}$ //

[w_t]: $-\beta . q_2 + 1 = q_2 \Rightarrow q_2(1+\beta) = 1 \Rightarrow q_2 = \frac{1}{1+\beta}$ //

Logo

$$\boxed{p_t = (1+c) \gamma . y^* + 1 . m_{t-1} + \frac{1}{1+\beta} w_t + \frac{1}{1+\beta} . \phi_t} \quad (5.8)$$

Para encontrar o produto de equilíbrio, vamos usar a curva de oferta de Lucas vista em (4). Para tanto, precisamos calcular:

$$\mathbb{E}_{t-1}\{p_t\} = (1+c).\gamma.y^* + m_{t-1}$$

Assim;

$$y_t = y^* + \alpha.\left[\cancel{(1+c)\gamma y^*} + \cancel{m_{t-1}} + \frac{1}{(1+\beta)}.w_t + \frac{1}{1+\beta}.\phi_t - \cancel{(1+c).\gamma.y^*} - \cancel{m_{t-1}}\right]$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{y_t - y^*}_{\substack{||| \\ h_t}} = \alpha\left[\left(\frac{1}{1+\beta}\right).\phi_t + \left(\frac{1}{1+\beta}\right).w_t\right] \qquad (5.9)$$

$h_t \rightarrow$ Esse é o hiato do produto, i.e, o desvio entre o produto atual e seu nível potencial

- Note que os desvios entre o produto e seu nível potencial ocorrem apenas em função dos choques ϕ_t e w_t (indiretamente, u_t e v_t)
- Note que, nesse modelo, o governo não pode utilizar a política monetária para colocar o produto sistematicamente acima do potencial. Os agentes formam expectativas racionais em relação ao nível de preços. Como aumentos sistemáticos da oferta de moeda $\Rightarrow \uparrow \mathbb{E}_{t-1}\{p_t\}$, i.e, o índice de preços esperado para t, aumenta; com isso,

$$\downarrow h_t = \alpha\left[p_t - \uparrow\mathbb{E}_{t-1}\{p_t\}\right].$$

Resolução Alternativa para o Exercício 2

EX 2)

Definindo $\{\bar{y}_t, g_t, r^*_t, y^*_t, v_t\}$ como passeio aleatório, temos:

$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + e^{\bar{y}}_t \Rightarrow \Delta\bar{y}_t = e^{\bar{y}}_t$

$g_t = g_{t-1} + e^{g}_t \Rightarrow \Delta g_t = e^{g}_t$

$r^*_t = r^*_{t-1} + e^{r^*}_t \Rightarrow \Delta r^*_t = e^{r^*}_t$

$y^*_t = y^*_{t-1} + e^{y^*}_t \Rightarrow \Delta y^*_t = e^{y^*}_t$

$v_t = v_{t-1} + e^{v}_t \Rightarrow \Delta v_t = e^{v}_t$,

Onde $\{e^{\bar{y}}_t, e^{g}_t, e^{r^*}_t, e^{y^*}_t, e^{v}_t\}$ são ruído branco.

Usando a equação (3.1) do exercício anterior, temos que:

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 . E_t\{q_{t+1}\} + \beta_2 . \bar{y}_t + \beta_1 . r^*_t + \beta_3 . g_t + \beta_4 . y^*_t - \beta_2 v_t \quad (2.1)$$

Usando as definições de passeio aleatório;

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 . E_t\{q_{t+1}\} + \beta_2 . \bar{y}_{t-1} + \beta_1 . r^*_{t-1} + \beta_3 . g_{t-1} + \beta_4 . y^*_{t-1} - \beta_2 . v_{t-1} + \beta_2 . e^{\bar{y}}_t + \beta_1 e^{r^*}_t + \beta_3 . e^{g}_t + \beta_4 . e^{y^*}_t - \beta_2 . e^{v}_t$$

. As variáveis de estado são $\{\bar{y}_{t-1}, r^*_{t-1}, g_{t-1}, y^*_{t-1}, v_{t-1}, e^{\bar{y}}_t, e^{r^*}_t, e^{g}_t, e^{y^*}_t, e^{v}_t\}$

· proporemos uma solução do tipo: (Tomando como base as variáveis de estado)

$$(2.2) \quad q_t = \phi_0 + \phi_1 . \bar{y}_{t-1} + \phi_2 . r^*_{t-1} + \phi_3 . g_{t-1} + \phi_4 . y^*_{t-1} + \phi_5 . v_{t-1} + \phi_6 e^{\bar{y}}_t + \phi_7 e^{r^*}_t + \phi_8 . e^{g}_t + \phi_9 e^{y^*}_t + \phi_{10} . e^{v}_t$$

· Adiantando 1 período e tirando esperança:

$$E_t\{q_{t+1}\} = \phi_0 + \phi_1 . \bar{y}_{t-1} + \phi_1 . e^{\bar{y}}_t + \phi_2 . r^*_{t-1} + \phi_2 . e^{r^*}_t + \phi_3 . g_{t-1} + \phi_3 . e^{g}_t + \phi_4 . y^*_{t-1} + \phi_4 . e^{y^*}_t + \phi_5 . v_{t-1} + \phi_5 . e^{v}_t$$

$$\phi_0 + \phi_1 . \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 . r^*_{t-1} + \phi_3 . g_{t-1} + \phi_4 . y^*_{t-1} + \phi_5 . v_{t-1} + \phi_6 . e_t^{\tilde{y}} + \phi_7 . e_t^{r^*} + \phi_8 . e_t^{g} + \phi_9 . e_t^{y^*} + \phi_{10} . e_t^{v} =$$

$$\beta_0 + \beta_1 . \phi_0 + \beta_1 . \phi_1 . \tilde{y}_{t-1} + \beta_1 . \phi_1 . e_t^{\tilde{y}} + \beta_1 . \phi_2 . r^*_{t-1} + \beta_1 . \phi_2 . e_t^{r^*} + \beta_1 . \phi_3 . g_{t-1} + \beta_1 \phi_3 . e_t^{g} + \beta_1 . \phi_4 . y^*_{t-1}$$

$$+ \beta_1 \phi_4 . e_t^{y^*} + \beta_1 . \phi_5 . v_{t-1} + \beta_1 . \phi_5 . e_t^{v} + \beta_2 . \tilde{y}_{t-1} + \beta_1 . r^*_{t-1} + \beta_3 . g_{t-1} + \beta_4 y^*_{t-1} - \beta_2 v_{t-1} + \beta_2 . e_t^{\tilde{y}} +$$

$$\beta_1 . e_t^{r^*} + \beta_3 . e_t^{g} + \beta_4 . e_t^{y^*} - \beta_2 . e_t^{v}$$

resolvendo para os ϕ's:

$[cte]$: $\phi_0 = \beta_0 + \beta_1 . \phi_0 \Rightarrow \phi_0 (1 - \beta_1) = \beta_0 \Rightarrow \boxed{\phi_0 = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1}}$

$[\tilde{y}_{t-1}]$: $\phi_1 = \beta_1 . \phi_1 + \beta_2 \Rightarrow \boxed{\phi_1 = \dfrac{\beta_2}{1-\beta_1}}$

$[r^*_{t-1}]$: $\phi_2 = \beta_1 . \phi_2 + \beta_1 \Rightarrow \boxed{\phi_2 = \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1}}$

$[g_{t-1}]$: $\phi_3 = \beta_1 . \phi_3 + \beta_3 \Rightarrow \boxed{\phi_3 = \dfrac{\beta_3}{1-\beta_1}}$

$[y^*_{t-1}]$: $\phi_4 = \beta_1 . \phi_4 + \beta_4 \Rightarrow \boxed{\phi_4 = \dfrac{\beta_4}{1-\beta_1}}$

$[v_{t-1}]$: $\phi_5 = \beta_1 . \phi_5 - \beta_2 \Rightarrow \boxed{\phi_5 = \dfrac{-\beta_2}{1-\beta_1}}$

$[e_t^{\tilde{y}}]$: $\phi_6 = \beta_1 . \phi_1 + \beta_2 \Rightarrow \phi_6 = \beta_1 . \dfrac{\beta_2}{1-\beta_1} + \beta_2 = \beta_2 \left(1 + \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1}\right) = \dfrac{\beta_2}{1-\beta_1} \Rightarrow \boxed{\phi_6 = \phi_1}$

$[e_t^{r^*}]$: $\phi_7 = \beta_1 . \phi_2 + \beta_1 \Rightarrow \phi_7 = \beta_1 . \left(1 + \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1}\right) = \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1} \Rightarrow \boxed{\phi_7 = \phi_2}$

$[e_t^{g}]$: $\phi_8 = \beta_1 . \phi_3 + \beta_3 \Rightarrow \phi_8 = \dfrac{\beta_1 \beta_3}{1-\beta_1} + \beta_3 = \beta_3 \left(1 + \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1}\right) = \dfrac{\beta_3}{1-\beta_1} \Rightarrow \boxed{\phi_8 = \phi_3}$

$[e_t^{y^*}]$: $\phi_9 = \beta_1 . \phi_4 + \beta_4 \Rightarrow \phi_9 = \beta_1 . \dfrac{\beta_4}{1-\beta_1} + \beta_4 = \dfrac{\beta_4}{1-\beta_1} \Rightarrow \boxed{\phi_9 = \phi_4}$

$[e_t^{v}]$: $\phi_{10} = \beta_1 . \phi_5 - \beta_2 \Rightarrow \phi_{10} = \beta_1 \left(\dfrac{-\beta_2}{1-\beta_1}\right) - \beta_2 = -\beta_2 \left(1 + \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1}\right) = -\dfrac{\beta_2}{1-\beta_1} \Rightarrow \boxed{\phi_{10} = \phi_5}$

Substituindo esses resultados na equação (2.2), de onde obtemos:

$$q_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}\underbrace{\left(\bar{y}_{t-1}+e_t^{\bar{y}}\right)}_{=\,\bar{y}_t} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\underbrace{\left(r^*_{t-1}+e_t^{r^*}\right)}_{=\,r^*_t} + \frac{\beta_3}{1-\beta_1}\underbrace{\left(q_{t-1}+e_t^{q}\right)}_{=\,q_t} + \frac{\beta_4}{1-\beta_1}\underbrace{\left(y^*_{t-1}+e_t^{y^*}\right)}_{=\,y^*_t} - \frac{\beta_2}{1-\beta_1}\cdot\underbrace{\left(v_{t-1}+e_t^{v}\right)}_{=\,v_t} \quad (2.3)$$

logo

$$q_{t-1} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}\cdot\bar{y}_{t-1} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\cdot r^*_{t-1} + \frac{\beta_3}{1-\beta_1}\cdot q_{t-1} + \frac{\beta_4}{1-\beta_1}\cdot y^*_{t-1} - \frac{\beta_2}{1-\beta_1}\cdot v_{t-1} \quad (2.4)$$

=> Substituindo (2.4) em (2.3):

$$q_t = q_{t-1} + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}\cdot e_t^{\bar{y}} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\cdot e_t^{r^*} + \frac{\beta_3}{1-\beta_1}\cdot e_t^{q} + \frac{\beta_4}{1-\beta_1}\cdot e_t^{y^*} - \frac{\beta_2}{1-\beta_1}\cdot e_t^{v}$$

logo

$$\boxed{\Delta q_t = \frac{1}{1-\beta_1}\left(\beta_2 \cdot e_t^{\bar{y}} + \beta_1 \cdot e_t^{r^*} + \beta_3\, e_t^{q} + \beta_4 \cdot e_t^{y^*} - \beta_2 \cdot e_t^{v}\right)} \quad (2.5)$$

Como Δq_t é uma combinação linear de ruídos brancos, segue que q_t é um passeio aleatório.