Mestrado em Finanças e Economia Empresarial
Microeconomia - 5^a Lista de Exercícios

Prof.: Carlos Eugênio
Monitor:Fernando Luz Barbosa
(fernando.luz@outlook.com)

1^a Questão Considere uma economia com produção composta por um consumidor e uma firma. As preferências do consumidor são representadas pela função utilidade

$$u(c, L) = \ln c + \ln(24 - L)$$

enquanto a tecnologia da firma é descrita por

$$c = \sqrt{L}$$

(a) Ache a única alocação Pareto eficiente desta economia.

(b) Encontre preços que suportem a alocação Pareto eficiente como equilíbrio competitivo.

(c) Qual teorema nos assegura que a tarefa requerida no item anterior é possível?

Solução:

a) Como existe apenas um consumidor, o Problema de Pareto consiste em maximizar a utilidade desse consumidor sujeito à tecnologia da firma. Então:

$$\begin{aligned}
& \underset{c,L}{Max} \ln c + \ln(24 - L) \\
s.a \quad c &= \sqrt{L} \\
&= \underset{L}{Max} \ln(L)^{\frac{1}{2}} + \ln(24 - L) \\
&= \underset{L}{Max} \frac{1}{2} \ln(L) + \ln(24 - L)
\end{aligned}$$

Das C.P.O temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2L} &= \frac{1}{24 - L} \\
&\Rightarrow L^* = 8 \\
&\Rightarrow c^* = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

b) Para encontrar os preços que suportem tal alocação como um equilíbrio competitivo. Vamos começar olhando para o problema da firma.

Note que $\pi = py - wL$, onde $y \leq \sqrt{L}$

Normalizando $p = 1$, temos

$$\begin{aligned} \pi(w) &= Max\ L^{1/2} - wL \\ \frac{\partial \pi}{\partial L} &= 0 \\ \frac{L^{*-1/2}}{2} &= w \Longrightarrow L_d^* = (2w)^{-2} \end{aligned}$$

Ou seja, resolvemos o problema da maximização de lucro da firma e encontramos a demanda por trabalho dado o salário w. Dessa forma podemos encontrar facilmente a equação que determina o lucro.

$$\pi(w) = (2w)^{-1} - w(2w)^{-2} = (4w)^{-1}$$

Portanto, normalizando $p = 1$, temos da RO do indivíduo:

$$c^* = wL^* + (4w)^{-1}$$

Então o problema do consumidor é:

$$\begin{aligned} Max \quad & ln(c) + ln(24 - L) \\ s.a. \quad & c = wL + (4w)^{-1} \end{aligned}$$

O lagrangeano do problema é:

$\Gamma = \ln c + \ln(24 - L) + \lambda[wL + (4w)^{-1} - c]$

CPO:
$\frac{1}{c^*} = \lambda$
$\frac{1}{24 - L_s^*} = \lambda w \Longrightarrow c^* = (24 - L_s^*)w$

Substituindo na RO, temos:

$(24 - L_s^*)w = wL_s^* + (4w)^{-1} \Longrightarrow L_s^* = 12 - \frac{(2w)^{-2}}{2}$

Como $L_d^* = (2w)^{-2}$, temos que em equilíbrio:$L_d^* = L_s^* \Longrightarrow (2w^*)^{-2} = 12 - \frac{(2w^*)^{-2}}{2} \Longrightarrow L^* = (2w^*)^{-2} = 8$ e $w^* = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

Logo, um equilíbrio dessa economia é: $(p = (1, \frac{\sqrt{2}}{8}), x = (8, 2\sqrt{2}))$

c) Segundo Teorema do Bem-Estar. Qualquer alocação eficiente pode ser sustentada por um equilíbrio competitivo.

2^a Questão Considere agora uma economia idêntica à descrita na questão anterior, exceto pela tecnologia da firma que agora passa a ser descrita pela função

$$c = L^2$$

(a) Ache a única alocação Pareto eficiente desta economia.

(b) Mostre que esta alocação não pode ser suportada como equilíbrio competitivo.

Solução:

Procedendo de forma análoga à questão anterior, teremos que o problema de pareto será

$$\begin{array}{ll} \underset{c,L}{Max} & \ln c + \ln(24 - L) \\ s.a & c = L^2 \end{array}$$

Note que esse problema de maximização é equivalente a:

$$\underset{L}{Max}\ 2\ln(L) + \ln(24 - L)$$

Das C.P.O temos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} &= \frac{1}{24 - L} \\ &\Rightarrow L^* = 16 \\ &\Rightarrow c^* = 256 \end{aligned}$$

b) Note que a função de produção apresenta rendimentos crescentes de escala. Retornos crescentes de escala são um exemplo de não convexidade do conjunto de produção, portanto violando a condição de aplicabilidade do segundo teorema do bem estar. Note que se a firma toma os preços relativos como a taxa marginal de substituição do agente, ela iria querer aumentar a sua produção acima da demanda por produto e oferta de insumo proporcionada pelo agente, não sustentando assim um equilíbrio competitivo(pela condição de market clearing).

3^a Questão Considere uma economia com dois agentes, 1 e 2, que consomem dois bens, x e y, e cujas funções utilidades e dotações são dadas por:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, y_1) &= Min\{x_1; 2y_1\} \qquad w_1 = (7, 2) \\ u_2(x_2, y_2) &= x_2 + y_2 \qquad\qquad w_2 = (3, 3) \end{aligned}$$

(a) Encontre as alocações Pareto eficientes.

(b) Defina e encontre o equilíbrio competitivo.

(c) Enuncie e diga se vale o Primeiro Teorema do Bem Estar?

Solução:
a) Problema de Pareto:

$$\underset{\{x_1,y_1,x_2,y_2\}}{Max} u_1(x_1,y_1)$$

$$\begin{array}{llcl} s.a. & u_2(x_2,y_2) & \geq & \overline{u} \\ & x_1+x_2 & = & 10 \\ & y_1+y_2 & = & 5 \end{array}$$

Isto é,

$$\underset{\{x_1,y_1,x_2,y_2\}}{Max} Min\,\{x_1;2y_1\}$$

$$\begin{array}{llcl} s.a. & x_2+y_2 & \geq & \bar{u}_2 \\ & x_1+x_2 & = & 10 \\ & y_1+y_2 & = & 5 \end{array}$$

No ótimo, devemos ter:

$$x_{1_{PO}} = 2y_{1_{PO}} \tag{1}$$

$$x_{2_{PO}} + y_{2_{PO}} = \bar{u}_2 \tag{2}$$

Das restrições de recursos:

$$\Rightarrow \quad x_{1_{PO}} + y_{1_{PO}} = 15 - \bar{u}_2 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad y_{1_{PO}} = \frac{15-\bar{u}_2}{3} \tag{4}$$

$$x_{1_{PO}} = \frac{2(15-\bar{u}_2)}{3} \tag{5}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} x_{2_{PO}} &= 10 - x_{1_{PO}} \\ &\Rightarrow \quad x_{2_{PO}} = \frac{2\bar{u}_2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2_{PO}} &= 5 - y_{1_{PO}} \\ &\Rightarrow \quad y_{2_{PO}} = \frac{\bar{u}_2}{3} \end{aligned}$$

b) Equilíbrio Competitivo. é um par de alocações e um vetor de preços tais que (vale factibilidade e maximizam a utilidade do agente).

Indivíduo 1:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \underset{x_1,y_1}{Max} u_1(x_1,y_1) \\
s.a \quad p_x x_1 + p_y y_1 & \leq & \underbrace{7p_x + 2\ p_y}_{R_1}
\end{array}
$$

No ótimo,

$$x_1^* = 2y_1^*$$

Normalize $p_x = 1$ e substitua na R.O. para obter

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{2R_1}{2+p} \\
y_1^* &= \frac{R_1}{2+p}
\end{aligned}
$$

Indivíduo 2:

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x_2,y_2}{Max} & u_2(x_2,y_2) \\
s.a & p_x x_2 + p_y y_2 \leq \underbrace{3p_x + 3\ p_y}_{R_2} \\
 & x_2 \geq 0 \\
 & y_2 \geq 0
\end{array}
$$

Consideraremos apenas o caso em que $x_2^* > 0, y_2^* > 0$.

Monte o lagrangeano e note que das C.P.O teremos,

$$
\begin{aligned}
1 &= \lambda p_x \\
1 &= \lambda p_y \\
\Rightarrow p_x &= p_y
\end{aligned}
$$

Normalize $p_x = 1$ e substitua na R.O. para obter

$$x_2^* + y_2^* = 6$$

Então, vemos que

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{2R_1}{2+p} = \frac{2(7+2)}{2+1} = 6 \Rightarrow x_2^* = 4 \\
y_1^* &= 3 \Rightarrow y_2^* = 2
\end{aligned}
$$

c) Note que se $\bar{u}_2 = 6$

$$\begin{aligned} x_{1_{PO}} &= x_1^* \\ y_{1_{PO}} &= y_1^* \\ x_{2_{PO}} &= x_2^* \\ y_{2_{PO}} &= y_2^* \end{aligned}$$

Logo,é valido o 1^o Teorema do Bem-Estar que afirma que todo equilíbrio competitivo leva a uma alocação pareto eficiente dos recursos.

“The first theorem is often taken to be an analytical confirmation of Adam Smith’s ”invisible hand”hypothesis, namely that competitive markets tend toward an efficient allocation of resources. The theorem supports a case for non-intervention in ideal conditions: let the markets do the work and the outcome will be Pareto efficient. However, Pareto efficiency is not necessarily the same thing as desirability; it merely indicates that no one can be made better off without someone being made worse off. There can be many possible Pareto efficient allocations of resources and not all of them may be equally desirable by society”

Lembre-se que uma alocação aonde o primeiro agente recebe todos os bens da economia e o segundo agente não recebe nenhum é Pareto Eficiente já que é impossível melhorar alguém sem piorar ninguém.

“Imagine o mercado (...) como se ele fosse o seu corpo. Agora pense melhor sobre o que é o seu corpo. Você é um amontoado de 100 trilhões de células. Cada uma ali descende de uma forma de vida rudimentar: moléculas de 3,5 bilhões de anos atrás que passavam o dia flutuando na água do mar – ou no “caldo primordial”, como os cientistas preferem chamar a mistura de água em moléculas onde a vida começou. A única diferença entre essas formas de vida rudimentares e grãos de areia era que elas tinham aprendido algo estranho: fazer cópias de si mesmas. A matéria-prima para essas cópias eram outras moléculas que flutuavam no caldo. A molécula era uma versão primitiva daquilo que a gente chama de DNA, uma cadeia de átomos de carbono, hidrogênio, oxigênio e nitrogênio colados uns nos outros, formando uma escultura microscópica em forma de hélice. Cada uma dos seus 100 trilhões de células carrega uma estrutura dessas dentro dela. Bom, esse DNA flutuante de 3,5 bilhões de anos atrás pescava (digamos assim) nutrientes no caldo e, a partir dos átomos de carbono, hidrogênio, oxigênio e nitrogênio, formava outra escultura em forma de hélice, novinha. E podia morrer em paz. Essas outras esculturas eram as filhas dela, cada uma capaz de gerar suas próprias cópias.

Cada nova geração, porém, não saía exatamente igual à anterior. Aparecia um errinho de cópia aqui, outro ali. Às vezes o erro tornava a molécula de DNA inútil. E ela morria. Mas outras vezes o erro de cópia dava numa mudança, uma mutação, que conferia alguma vantagem para ela. Com o tempo, apareceram algumas moléculas com uma vantagem clara: tinham a capacidade de usar outras estruturas de DNA para fabricar seus filhos, e não só nutrientes soltos no caldo. Eram os primeiros predadores, que comiam outras formas de vida para sobreviver, igual você faz, mesmo que seja um vegetariano radical. (...) Mas surgiriam outras mutações. Algumas moléculas nasceram com uma mutação ótima para esses tempos de guerra. Uma carapaça natural, uma armadura que permitia comer os rivais sem correr o risco de ser comido. Eram as primeiras células, contêineres de proteína que protegem a vida da molécula de DNA lá dentro. Só essas sobreviveram à guerra primordial.

Mas não demorou para chegarem células mutantes ainda melhores, com mais capacidade destrutiva. Essas células tinham o maior de todos os poderes: a capacidade de se unir, de juntar forças. Funcionavam como um pequeno exército, usando a especialidade de cada tipo de célula para o bem do conjunto. Especialidades como esta aqui: células com uma mutação que as fazia perceber a presença ou a ausência de luz, por exemplo, ficavam na linha de frente. Essa capacidade permitia enxergar onde estavam as presas. Outras cuidavam do sistema de locomoção, trabalhando como remadoras de um navio, outras ficavam a cargo de consumir os nutrientes e repassar energia para o sistema de visão e as células locomotoras (o sistema digestivo, basicamente). De quebra, aprenderam a se reproduzir em conjunto. Um exército gerava outros exércitos prontos, não só células soltas. E o progresso nunca parou. Esses exércitos foram ficando cada vez maiores e mais eficientes. Viraram o que o biólogo inglês Richard Dawkins (um dos primeiros a enxergar a evolução da vida por esse ponto de vista, o das moléculas) chamou de 'máquinas de sobrevivência'.

Hoje elas são exércitos incomensuravelmente grandes, formados por trilhões de células. E se você quiser ver uma delas é só olhar no espelho. Seu corpo é uma máquina de sobrevivência: uma junção de trilhões de microformas de vida. Se você pegar um microscópio e olhar só um pedaço ínfimo do seu corpo, vai ver um cenário caótico: batalhas entre glóbulos brancos e micro-organismos, bactérias que se instalaram nas células para se aproveitar delas, mas que sem querer acabam ajudando-as a funcionar melhor... Seu corpo é uma coisa relativamente ordenada que emerge de um caos completo. O mercado (...) também." [1]

Cada participante do mercado age como uma célula. Ele está ali exclusivamente para o próprio benefício. Mas a junção de milhões de agentes comprando e vendendo (e produzindo) caoticamente forma um corpo até que bem ordenado.

Adam Smith, o filósofo que ergueu as primeiras vigas do pensamento econômico, resumiu a coisa numa frase: "Não é da benevolência do açougueiro, do padeiro e do cervejeiro que sai o seu jantar, mas da preocupação deles com o próprio interesse". É a noção da "mão invisível do mercado", termo criado por ele: de uma massa caótica e egoísta (comerciantes competindo para se dar bem), surge a possibilidade de você comprar carne, pão e cerveja. Sem o interesse próprio de quem vende, você não teria nada na mesa.

[1] Versignassi, Alexandre (2015-01-09). Crash - 2.ª edição (Kindle Locations 3029-3034). LEYA BRASIL. Kindle Edition.

4^a**Questão** Uma economia de trocas pura é formada por dois indivíduos com preferências idênticas definidas sobre dois bens e representadas por

$$u(x_1^i, x_2^i) = \sqrt{x_1^i x_2^i}, i = A, B$$

e com dotações $(\bar{x}_1^A, \bar{x}_2^A) = (2, 0)$ e $(\bar{x}_1^B, \bar{x}_2^B) = (0, 2)$.

1. (a) Suponha que o preço do bem 1 é 1 e o preço do bem 2 é p. Ache as demandas excedentes de cada um dos bens para cada um dos indivíduos.

   (b) Ache p que faz com que a demanda excedente agregada dos bens seja igual a 0.

   Solução:

a)Caso Geral Cobb-Douglas:

Max $x_1^\alpha x_2^\beta$
sa $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R$

$\Gamma = x_1^\alpha x_2^\beta + \lambda[R - p_1 x_1 - p_2 x_2]$

CPO:
$\alpha x_1^{*\alpha-1} x_2^{*\beta} = \lambda p_1$
$\beta x_1^{*\alpha} x_2^{*\beta-1} = \lambda p_2$
$\Longrightarrow \frac{\alpha x_2^*}{\beta x_1^*} = \frac{p_1}{p_2} \Longrightarrow p_1 x_1^* = \frac{\alpha}{\beta} p_2 x_2^*$
Da RO:
$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = R \Longrightarrow (\frac{\alpha+\beta}{\beta}) p_2 x_2^* = R$
$\Longrightarrow x_2^* = (\frac{\beta}{\alpha+\beta}) \frac{R}{p_2}$ e $x_1^* = (\frac{\alpha}{\alpha+\beta}) \frac{R}{p_1}$

Do exercício, temos que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, p_1 = 1, p_2 = p, R_i = \bar{x}_1^i + p\bar{x}_2^i, i = A, B$
Logo,

$R_A = 2, R_B = 2p$
$x_1^{*i} = \frac{1}{2} R_i, x_2^{*i} = \frac{1}{2} \frac{R_i}{p}, i = A, B$

$\Longrightarrow x_1^{*A} = 1, x_2^{*A} = \frac{1}{p}$ e $x_1^{*B} = p, x_2^{*B} = 1$

Demandas Excedentes de A:
$z_1^A(p) = x_1^{*A} - \bar{x}_1^A = 1 - 2 = -1$
$z_2^A(p) = x_2^{*A} - \bar{x}_2^A = \frac{1}{p} - 0 = \frac{1}{p}$

Demandas Excedentes de B:
$z_1^B(p) = x_1^{*B} - \bar{x}_1^B = p - 0 = p$
$z_2^B(p) = x_2^{*B} - \bar{x}_2^B = 1 - 2 = -1$

b)Demanda Excedente Total dos bens 1 e 2:
$Z_1(p) = z_1^A(p) + z_1^B(p) = -1 + p$
$Z_2(p) = z_2^A(p) + z_2^B(p) = \frac{1}{p} - 1$

Para $p = 1$ temos que $Z_1(p) = Z_2(p) = 0$

5^{a}Questão Considere uma economia formada por dois indivíduos com preferências idênticas definidas sobre dois bens de forma igual ao exercício anterior. A dotação agregada da economia é $(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = (2, 2)$.Ache a alocação que dá a maior utilidade possível ao indivíduo A sujeito à restrição de que o indivíduo B tenha uma utilidade não inferior a 1.

Solução:

Problema de Pareto:
$$\underset{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B}{Max} \quad x_1^{A\frac{1}{2}} x_2^{A\frac{1}{2}}$$
$$\text{sa } x_1^{B\frac{1}{2}} x_2^{B\frac{1}{2}} \geq \bar{u}_B$$
$$x_1^A + x_1^B \leq \bar{X}_1$$
$$x_2^A + x_2^B \leq \bar{X}_2$$

$$\Gamma = x_1^{A\frac{1}{2}} x_2^{A\frac{1}{2}} + \lambda[x_1^{B\frac{1}{2}} x_2^{B\frac{1}{2}} - \bar{u}_B] + \mu_1[\bar{X}_1 - x_1^A - x_1^B] + \mu_2[\bar{X}_2 - x_2^A - x_2^B]$$
CPO:
$$\tfrac{1}{2} x_1^{A-\frac{1}{2}} x_2^{A\frac{1}{2}} = \mu_1$$
$$\tfrac{1}{2} x_1^{A\frac{1}{2}} x_2^{A-\frac{1}{2}} = \mu_2$$
$$\lambda \tfrac{1}{2} x_1^{B-\frac{1}{2}} x_2^{B\frac{1}{2}} = \mu_1$$
$$\lambda \tfrac{1}{2} x_1^{B\frac{1}{2}} x_2^{B-\frac{1}{2}} = \mu_1$$

Logo, as alocações pareto eficientes são:
$((x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B))$ tais que:

$(1) TMS_{1,2}^A = \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B} = TMS_{1,2}^B$
$(2) x_1^{B\frac{1}{2}} x_2^{B\frac{1}{2}} = \bar{u}_B$
$(3) x_1^A + x_1^B = \bar{X}_1$
$(4) x_2^A + x_2^B = \bar{X}_2$

Considerando $(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = (2, 2)$ e $\bar{u}_B = 1$ temos:
de(2):$x_1^B x_2^B = 1$, de (3) e (4): $\frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{2 - x_2^A}{2 - x_1^A} \Longrightarrow$de(1):$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{2 - x_2^A}{2 - x_1^A}$

$\Longrightarrow x_2^A = x_1^A \Longrightarrow$de(1):$x_2^B = x_1^B \Longrightarrow$de(2)(3)e(4):$x_2^A = x_1^A = x_2^B = x_1^B = 1.$

6^{a}Questão Considere uma economia de Robinson-Crusoé (com um indivíduo que ao mesmo tempo é consumidor e produtor). As preferências definidas sobre consumo, C, e lazer, l, são dadas por $U(C, l) = \ln C + \gamma \ln l$. A dotação de tempo é $\bar{L}$, que o indivíduo pode usar para consumir lazer, l, ou trabalhar, e receber uma renda $wL = w(\bar{L} - l)$, onde w é o salário, que pode ser usada para comprar o bem de consumo.Nesta economia existe uma firma que produz o bem de consumo usando trabalho por meio de uma tecnologia $C = f(L) = \frac{L}{a}$.

1. (a) Normalizando o preço do bem de consumo para 1 qual seria o salário no equilíbrio de mercado?

   (b) Encontre as quantidades consumidas e o bem-estar no equilíbrio de mercado.

Solução:
a) Problema da Firma:
$Max\ \Pi = f(L) - wL = \frac{L}{a} - wL = (\frac{1}{a} - w)L$

Se $w > \frac{1}{a}$ a firma não produz.
Se $w < \frac{1}{a}$, então o problema não tem solução.
Logo, $w = \frac{1}{a}$.

b)Problema do consumidor:
$\underset{C,l,L}{Max} \ln C + \gamma \ln l$.
Sa $C \leq wL$
$l + L \leq \bar{L}$

ou

$\underset{L}{Max} \ln(wL) + \gamma \ln(\bar{L} - L)$
CPO:
$\frac{1}{L^*} = \frac{\gamma}{\bar{L} - L^*} \Longrightarrow L^* = \frac{\bar{L}}{1+\gamma}, l^* = \frac{\gamma \bar{L}}{1+\gamma}$ e $C^* = \frac{\bar{L}}{a(1+\gamma)}$