Mestrado em Finanças e Economia Empresarial
Microeconomia - 1^a Lista de Exercícios
Prof.: Carlos Eugênio

Monitor:Fernando Luz Barbosa
(fernando.luz@outlook.com)

Parte I

1^a Questão

Considere um consumidor que se defronta com uma restrição orçamentária do tipo $p_1x_1 + p_2x_2 \leq y$, onde x_1 e x_2 são os bens que este indivíduo consome, p_1 e p_2 são seus respectivos preços e y é a sua renda. Discuta como os preços relativos e a renda afetam o conjunto orçamentário deste consumidor.

R.

A idéia desta questão é que seja notado que mudanças na renda deslocam paralelamente a reta orçamentária, enquanto mudanças nos preços relativos dos bens afetam a inclinação desta inequação que define o conjunto orçamentário.

A reta orçamentária liga dois pontos, o primeiro é o máximo de bem 1 que o consumidor consegue comprar. Ou seja, o primeiro ponto, é quanto de x_2 pode ser comprado quando todo a renda é alocada somente para o consumo desse bem. O segundo ponto é análago, mas referente ao bem 2. Em outras palavras, a reta que define a restrição orçamentária liga y/p_2 a y/p_1.

2^a Questão

Considerando os axiomas sobre a relação de preferência de um consumidor, explique a inconsistência lógica envolvida na interseção entre duas curvas de indiferença.

R.

Curvas de indiferença não podem se cruzar pois isso feriria o axioma da transitividade. Suponha duas curvas de indiferença U_1 e U_2. O consumidor é indiferente entre escolher qualquer uma das cestas de bens sobre a mesma curva de indiferença, por definição. Se as duas curvas de indiferença se cruzam, existe um ponto A que pertence a ambas as curvas. Seja, B uma cesta pertencente a U_1 e C uma cesta pertencente a U_2. Então $A \sim B$, pois ambos pertencem a U_1. Da mesma forma, $B \sim C$. Mas então, pelo princípio da transitividade, temos que $A \sim C$. Como estamos falando de duas curvas (de indiferença) diferentes, é necessário que o consumidor prefira estritamente as cestas pertencentes a uma das curvas em relação as cestas pertencentes a outra. Ou seja, $(a_1, a_2) \in U_1$ e $(c_1, c_2) \in U_2 \Rightarrow (a_1, a_2) \succ (c_1, c_2)$. Ora, mas então chegamos a uma contradição. O que conclui a demonstração.

3^a Questão

(a) Um técnico de futebol americano de uma faculdade afirma que, dados dois jogadores A e B, ele sempre preferirá aquele que for maior e mais rápido (ponderando estes quesitos igualmente). Essa relação de preferência é racional? Discuta. Obs: Um relação de preferência racional é completa e transitiva.

R. Supor que uma relação de preferência é completa significa basicamente que o agente (consumidor) consegue rankear todas as possíveis cestas.

Imagine que A seja maior que B, mas que B seja mais rápido que A. Qual dos dois jogadores o técnico escalaria? Logo o técnico não pode comparar entre duas determinadas opções, isto é ferir a completeza.

b. Prove, se verdadeira, a seguinte afirmação: "Enquanto a taxa marginal de substituição entre dois bens, para um determinado indivíduo, for diferente da razão entre seus preços, será possível elevar a utilidade deste consumidor manipulando as quantidades consumidas destes dois bens".

R.

Vamos supor que inicialmente o indivíduo escolhe uma cesta (x_1, x_2) com custo $\overline{y}$. Nossa estratégia será alterar essa cesta, diminuindo o consumo de um dos bens e aumentando o consumo do outro, de forma a não modificar o gasto total $\overline{y}$. O objetivo é aumentar a utilidade, sem aumentar gastos.

Como $\overline{y}$ está fixo, x_2 será função de x_1

$$
\begin{aligned}
p_1 x_1 + p_2 x_2 &= \overline{y} \\
&\Rightarrow \quad x_2 = \frac{\overline{y} - p_1 x_1}{p_2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}
\end{aligned}
$$

Diferenciando a função utilidade (considerando a função diferenciável) teremos:

$$
\begin{aligned}
du(x_1, x_2) &= \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 \\
&\Rightarrow \quad du(x_1, x_2) = \left(\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} + \frac{dx_2}{dx_1} \right) \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 \\
&\Rightarrow \quad du(x_1, x_2) = \left(\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} - \frac{p_1}{p_2} \right) \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1
\end{aligned}
$$

Portanto, se $\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} > \frac{p_1}{p_2}$ é possível melhorar o indivíduo modificando a alocação dos gastos, pois abrimos mão de um pouquinho de x_2 e compramos mais x_1 , isso gerará um dx_1 positivo e consequentemente um aumento de utilidade. Obviamente, caso a desigualdade estivesse ao contrário, a estratégia seria diminuir o consumo de x_1 e usar o dinheiro que sobrasse para aumentar o consumo de x_2.

Parte II

4^a Questão (Demanda Leontief)

Considere um consumidor com a seguinte função utilidade:

$$u(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$$

onde x_1 e x_2 são os bens que este indivíduo consome, denote p_1 e p_2 seus respectivos preços e denote y como sendo a sua renda.

Construa e resolva o problema do consumidor calculando as funções de demanda marshallianas para os bens 1 e 2.

.

R.

Note que o máximo desta função utilidade será quando $\alpha x_1 = \beta x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{\beta}{\alpha}x_2$

Além disso, essa função utilidade representa preferências com não saciedade local, consequentemente, a restrição orçamentária vale como igualdade.

Na R.O. temos então:

$p_1\frac{\beta}{\alpha}x_2 + p_2x_2 = y \Rightarrow x_2(\frac{\beta p_{1+}\alpha p_2}{\alpha}) = y \Rightarrow x_2 = \frac{\alpha y}{\beta p_{1+}\alpha p_2}$

Analogamente,

$x_1 = \frac{\beta y}{\beta p_{1+}\alpha p_2}$

$x(\mathbf{p}, y) = \left(\frac{\beta y}{\beta p_{1+}\alpha p_2}\ ;\ \frac{\alpha y}{\beta p_{1+}\alpha p_2}\right)$

5^a Questão (Demanda Cobb-Douglas)

Considere um consumidor com a seguinte função utilidade:

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \alpha, \beta > 0$$

.onde x_1 e x_2 são os bens que este indivíduo consome, denote p_1 e p_2 seus respectivos preços e denote y como sendo a sua renda.

a. Calcule as funções de demanda marshallianas para os bens 1 e 2.

R.

a) O problema do consumidor é:

$$\underset{x_1,x_2}{Max} u(x_1, x_2)$$
$$s.a.\ \ p_1x_1 + p_2x_2 \leq y$$

O lagrangeano do problema é:

$L = u(x_1, x_2) + \lambda[y - p_1x_1 - p_2x_2]$

$L = x_1^\alpha x_2^\beta + \lambda[y - p_1x_1 - p_2x_2]$

As condições de Primeira ordem são:
$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} = \lambda p_1$
$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} = \lambda p_2$
$\Rightarrow \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow p_1 x_1 = \frac{\alpha}{\beta} p_2 x_2$
Na R.O. temos então:
$\frac{\alpha}{\beta} p_2 x_2 + p_2 x_2 = y \Rightarrow p_2 x_2 (\frac{\alpha+\beta}{\beta}) = y \Rightarrow x_2 = \frac{\beta y}{(\alpha+\beta) p_2}$
Analogamente,
$x_1 = \frac{\alpha y}{(\alpha+\beta) p_1}$
$x(\mathbf{p}, y) = \left(\frac{\alpha y}{p_1(\alpha+\beta)} \; ; \; \frac{\beta y}{p_2(\alpha+\beta)} \right)$.
(Dica: Um modo mais rápido seria aplicando a transformação monotônica crescente $f(x) = \ln(x)$ que é exatamente a questão 7)

b. Homoteticidade é a propriedade das preferências nas quais a taxa marginal de substituição é constante para todas as cestas ao longo de uma mesma reta partindo da origem. Mostre que a função de utilidade Cobb-Douglas é homotética.

R.
$TMS = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$. Tome uma reta arbitrária partindo da origem $x_2 = \delta x_1$. Então, para todos os pontos sobre esta reta, a taxa marginal de substituição é $\frac{\alpha \delta}{\beta}$

6^a Questão (Utilidade CES)

Considere a função utilidade

$$u(x) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho} ; x \in R_{++}^2 :$$

a. Resolva o problema do consumidor.

R. Das condições de primeira ordem teremos:
$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_1^{\rho-1} = \lambda p_1$
$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_2^{\rho-1} = \lambda p_2$
$\Rightarrow x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$
Na R.O

$$\Rightarrow \quad p_1 x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} + p_2 x_2 = y$$

$$\Rightarrow \quad y = x_2 (p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}).p_2^{\frac{-1}{\rho-1}}$$

$$\Rightarrow \quad x_2^* = \frac{p_2^{\frac{1}{\rho-1}} y}{(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}})}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^* = \frac{p_1^{\frac{1}{\rho-1}} y}{(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}})}$$

b. Mostre que quando $\rho = 1$, as curvas de indiferença são lineares.

Na função original temos que

$$\rho = 1 \Longrightarrow u(x) = x_1 + x_2$$

Portanto, definimos uma curva de indiferença arbitrária como:

$$\overline{u} = x_1 + x_2$$

Onde $\overline{u}$ representa um número real qualquer.
Note que essa curva de indiferença é definida pela reta.

$$x_2 = \overline{u} - x_1$$

7^a Questão (Transformações)

Suponha que um determinado consumidor tem uma relação de preferências caracterizada pela seguinte função utilidade:

$$u(x_1, x_2) = \alpha \log x_1 + \beta \log x_2$$

onde x_1 e x_2 são os bens que este indivíduo consome, denote p_1 e p_2 seus respectivos preços e denote y como sendo a sua renda.

a. Ache as escolhas ótimas deste consumidor.

R.
O problema do consumidor é:

$$\underset{x_1, x_2}{Max}\ u(x_1, x_2)$$

$$s.a.\ \ p_1x_1 + p_2x_2 \leq y$$

O lagrangeano do problema é:
$L = u(x_1, x_2) + \lambda[y - p_1x_1 - p_2x_2]$
$L = \alpha \log x_1 + \beta \log x_2 + \lambda[y - p_1x_1 - p_2x_2]$
As condições de Primeira ordem são:
$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1$
$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{x_2} = \lambda p_2$
$\Rightarrow \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow p_1x_1 = \frac{\alpha}{\beta} p_2x_2$
Na R.O. temos então:
$\frac{\alpha}{\beta} p_2x_2 + p_2x_2 = y \Rightarrow p_2x_2(\frac{\alpha+\beta}{\beta}) = y \Rightarrow x_2 = \frac{\beta y}{(\alpha+\beta)p_2}$
Analogamente,
$x_1 = \frac{\alpha y}{(\alpha+\beta)p_1}$
$x\left(\mathbf{p}, y\right) = \left(\frac{\alpha y}{p_1(\alpha+\beta)}\ ;\ \frac{\beta y}{p_2(\alpha+\beta)}\right).$

b. Ache a função utilidade indireta.

R. Note que a função utilidade indireta corresponde à função utilidade avaliada em suas escolhas ótimas. Ou seja, a função utilidade indireta indica: dado um vetor de preços e renda, qual o nível de utilidade atingido. Então temos que;
$v(\mathbf{p}, y) = \alpha \log\left(\frac{\alpha y}{p_1(\alpha+\beta)}\right) + \beta \log\left(\frac{\beta y}{p_2(\alpha+\beta)}\right)$

c. Verifique a validade da identidade de Roy.

R. A identidade de Roy é:

$$x_i\left(\mathbf{p}, y\right) = -\frac{\frac{\partial v(\mathbf{p},y)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\mathbf{p},y)}{\partial y}}$$

Derivando a função utilidade indireta temos:

$$\frac{\partial v}{\partial p_1}(\mathbf{p}, y) = -\frac{\alpha\left(\alpha+\beta\right)p_1}{\alpha y}\frac{(\alpha+\beta)\alpha y}{\left(\alpha+\beta\right)^2 p_1^2} = -\frac{\alpha}{p_1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{p}, y) = \frac{\alpha\left(\alpha+\beta\right)p_1}{\alpha y}\frac{\alpha}{\left(\alpha+\beta\right)p_1} + \frac{\beta\left(\alpha+\beta\right)p_2}{\beta y}\frac{\beta}{\left(\alpha+\beta\right)p_2} = \frac{\alpha+\beta}{y}$$

Das duas expressões acima é óbvio que a identidade de Roy é válida.