Microeconomia

Teoria da Produção

Outubro de 2015

Teoria da Produção vs. Teoria da Firma

- *Por que certas atividades são coordenadas dentro das firmas e não via mercado? Em outras palavras, por que a coordenação das atividades econômicas às vezes se dá via autoridade e outras vezes via preços?*

Teoria da Produção vs. Teoria da Firma

- *Por que certas atividades são coordenadas dentro das firmas e não via mercado? Em outras palavras, por que a coordenação das atividades econômicas às vezes se dá via autoridade e outras vezes via preços?*

- Coase (1937) ofereceu a seguinte resposta: existem custos de se usar o sistema de preços (custos de transações) em um mundo de informação imperfeita.
- O que são custos de transações? Custos de informação, custos contratuais, etc.

Firma como tecnologia capaz de transformar insumos em produtos (firma como caixa preta)

- Suporemos seu objetivo: maximizar lucros.
- Queremos avançar rápida e parcimoniosamente a uma teoria sobre o 'comportamento de mercado' da firma.
- Verificar efeitos das mudanças de preços em ofertas de produtos e demandas de insumos, no caso de uma economia competitiva.
- Podemos checar se as previsões do modelo aderem aos dados.

Definição: Um *plano de produção* é um vetor $\boldsymbol{y} \equiv (y_1, y_2, ..., y_m) \subset \mathbb{R}^m$ tal que $y_i > 0$ se i é um produto e $y_j < 0$ se j é um insumo (fator de produção).

Definição: *Conjunto de possibilidades de produção*, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$, caracteriza as tecnologias produtivas.

Definição: Um *plano de produção* é um vetor $\boldsymbol{y} \equiv (y_1, y_2, ..., y_m) \subset \mathbb{R}^m$ tal que $y_i > 0$ se i é um produto e $y_j < 0$ se j é um insumo (fator de produção).

Definição: *Conjunto de possibilidades de produção,* $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$, caracteriza as tecnologias produtivas.

Um plano de produção é factível, ou viável, quando $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$. Qualquer $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\boldsymbol{y} \notin \mathbb{Y}$ é dito inviável tecnologicamente.

Definição: Um *plano de produção* é um vetor $\boldsymbol{y} \equiv (y_1, y_2, ..., y_m) \subset \mathbb{R}^m$ tal que $y_i > 0$ se i é um produto e $y_j < 0$ se j é um insumo (fator de produção).

Definição: *Conjunto de possibilidades de produção,* $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$, caracteriza as tecnologias produtivas.

Um plano de produção é factível, ou viável, quando $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$. Qualquer $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\boldsymbol{y} \notin \mathbb{Y}$ é dito inviável tecnologicamente. Por meio do conjunto $\mathbb{Y}$ particionamos o espaço de planos de produção, representado pelo próprio $\mathbb{R}^m$, em planos viáveis e inviáveis.

Uma tecnologia é descrita, em geral, por meio das *propriedades de* $\mathbb{Y}$.

Uma tecnologia é descrita, em geral, por meio das *propriedades de* $\mathbb{Y}$.

- $\mathbb{Y} \neq \emptyset$. Ou seja, ***existe alguma produção factível***.
- ***No free lunch***. $\mathbb{Y} \cap \mathbb{R}^L_+ \subseteq \{\mathbf{0}\}$. (Note que $\emptyset \subset \{\mathbf{0}\}$) Em outros termos, não se pode produzir algo a partir de nada.
- $\mathbb{Y}$ *é fechado*, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{y}_n \in \mathbb{Y}\ \forall n$, então $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$. Hipótese de ***continuidade.***
- ***Free disposal*** - $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$ e $\boldsymbol{y}' \leq \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{y}' \in \mathbb{Y}$. Quantidades adicionais de insumos (ou produto) podem ser descartadas ou eliminadas sem custo.
- ***Possibilidade de inação***, $\mathbf{0} \in \mathbb{Y}$.

- ***Irreversibilidade*** $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y} \Rightarrow -\boldsymbol{y} \notin \mathbb{Y}$. Exemplo: se incluimos o tempo de disponibilidade em sua descrição, já que os insumos devem ser usados antes de os produtos existirem.
- ***Retornos de Escala:***
  - ***Não-crescentes*** $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}\ \forall\alpha \in [0,1]$ (a tecnologia é *divisível*)
  - ***Não-decrescentes*** $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}\ \forall\alpha \geq 1$. (a tecnologia é *replicável*)
  - ***Constantes:*** é uma tecnologia replicável e divisível.
- ***Aditividade*** (ou livre entrada): $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$, $\boldsymbol{y}' \in \mathbb{Y} \Rightarrow \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' \in \mathbb{Y}$.
- ***Convexidade**:* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}, \boldsymbol{y}' \in \mathbb{Y} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{y} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{y}' \in \mathbb{Y}$ $\forall\lambda \in [0,1]$.
- $\mathbb{Y}$ ***é um cone convexo***. $\mathbb{Y}$ é um cone convexo se $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$, $\boldsymbol{y}' \in \mathbb{Y}$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$,implica em $\alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{y}' \in \mathbb{Y}$.

Definição: *Função de transformação* $F(\cdot)$,

$$\mathbb{Y} \equiv \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m; F(\boldsymbol{y}) \leq 0\} \tag{1}$$

e $F(\boldsymbol{y}) = 0$ se $\boldsymbol{y}$ está na *fronteira de transformação*.

Definição: *Função de transformação* $F(\cdot)$,

$$\mathbb{Y} \equiv \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m; F(\boldsymbol{y}) \leq 0\} \tag{1}$$

e $F(\boldsymbol{y}) = 0$ se $\boldsymbol{y}$ está na *fronteira de transformação*.

Definição: Supondo $F(\cdot)$ diferenciável, definimos a *Taxa Marginal de Transformação do bem* l *pelo bem* k,

$$MRT_{lk}(\boldsymbol{y}) \equiv \frac{\partial_{y_l} F(\boldsymbol{y})}{\partial_{y_k} F(\boldsymbol{y})},$$

Definição: *Função de transformação* $F(\cdot)$,

$$\mathbb{Y} \equiv \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m; F(\boldsymbol{y}) \leq 0\} \tag{1}$$

e $F(\boldsymbol{y}) = 0$ se $\boldsymbol{y}$ está na *fronteira de transformação*.

Definição: Supondo $F(\cdot)$ diferenciável, definimos a *Taxa Marginal de Transformação do bem l pelo bem k*,

$$MRT_{lk}(\boldsymbol{y}) \equiv \frac{\partial_{y_l} F(\boldsymbol{y})}{\partial_{y_k} F(\boldsymbol{y})},$$

Em quanto a produção do bem k pode aumentar (ou, reduzir o uso do insumo k) se for reduzida em uma unidade a produção do bem l (ou, aumentada a quantidade do insumo l).

Maximização de Lucro

O problema de maximização de lucro da firma é

$$\max_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}.$$

Maximização de Lucro

O problema de maximização de lucro da firma é

$$\max_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}.$$

ou, usando a função de transformação $F(\cdot)$,

$$\max_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y} \text{ s.a. } F(\boldsymbol{y}) \leq 0$$

Maximização de Lucro

O problema de maximização de lucro da firma é

$$\max_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}.$$

ou, usando a função de transformação $F(\cdot)$,

$$\max_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y} \text{ s.a. } F(\boldsymbol{y}) \leq 0$$

Donde, a escolha ótima, $\boldsymbol{y}^*$, é caracterizada por $\boldsymbol{p} = \partial_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{y}^*)$.

Existe solução? Nem sempre.
Supondo que exista uma solução e que esta solução seja única, então definimos $\pi\left(\boldsymbol{p}\right) \equiv \max_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{y}\left(\boldsymbol{p}\right) \equiv \arg\max_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}$.

Propriedades da Função Lucro

1) Homogênea de grau 1 em $\boldsymbol{p}$

Propriedades da Função Lucro

1) Homogênea de grau 1 em $\boldsymbol{p}$

2) Quando $\mathbb{Y}$ *é convexo,* $\mathbb{Y} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n ; \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{y} \leq \pi(\boldsymbol{p}) \ \ \forall \boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}\}$.

Demonstração: $\mathbb{Y}$ é um sub-conjunto *não-vazio, convexo* e *fechado* de $\mathbb{R}^n$. Para todo $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ definimos a função suporte de $-\mathbb{Y}$, como $\mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p}) \equiv \inf\{\boldsymbol{p} \cdot (-\boldsymbol{y}) ; \boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}\}$. Para todo $\boldsymbol{p}$, o conjunto $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n ; \boldsymbol{p} \cdot (-\boldsymbol{y}) \geq \mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p})\}$ é um semi-espaço que contém $-\mathbb{Y}$. Além disso, se $\bar{\boldsymbol{y}} \notin -\mathbb{Y}$ então $-\boldsymbol{p} \bullet \bar{\boldsymbol{y}} < \mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p})$ para algum $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$. Assim, a interseção dos semi-espaços gerados por todos os valores possíveis de $\boldsymbol{p}$ é exatamente $\mathbb{Y}$, i.e., $\mathbb{Y} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n ; \boldsymbol{p} \cdot (-\boldsymbol{y}) \geq \mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p}) \text{ para todo } \boldsymbol{p}\}$. Note, então, que $\pi(\boldsymbol{p}) = -\mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p})$.

3) Convexa em $\boldsymbol{p}$

Demonstração: Tome três vetores de preços $\boldsymbol{p}^0$, $\boldsymbol{p}^1$ e $\boldsymbol{p}^t = t\boldsymbol{p}^0 + (1-t)\,\boldsymbol{p}^1$ para $t \in (0,1)$. E sejam $\boldsymbol{y}^0$, $\boldsymbol{y}^1$ e $\boldsymbol{y}^t$ as respectivas escolhas ótimas.

$$\boldsymbol{p}^0 \cdot \boldsymbol{y}^0 \geq \boldsymbol{p}^0 \cdot \boldsymbol{y}^t$$
$$\boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{y}^1 \geq \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{y}^t$$

Donde,

$$t\,\underbrace{\boldsymbol{p}^0 \cdot \boldsymbol{y}^0}_{\pi(\boldsymbol{p}^0)} + (1-t)\,\underbrace{\boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{y}^1}_{\pi(\boldsymbol{p}^1)} \geq \underbrace{\left[t\boldsymbol{p}^0 + (1-y)\,\boldsymbol{p}^1\right] \cdot \boldsymbol{y}^t}_{\pi(t\boldsymbol{p}^0+(1-t)\boldsymbol{p}^1)}$$

Logo, convexa em $\boldsymbol{p}$.

4) Lema de Hotelling: Se o conjunto $y(\boldsymbol{p})$ *é unitário,* $\pi(\boldsymbol{p})$ *é diferenciável e* $\nabla\pi(\boldsymbol{p}) = y(\boldsymbol{p})$.

Demonstração: O teorema da dualidade diz que se $-\mathbb{Y}$ é um conjunto convexo e fechado, e $\mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p})$ é sua função suporte então existe um único vetor $-\bar{\boldsymbol{y}} \in -\mathbb{Y}$ tal que $\bar{\boldsymbol{p}} \cdot (-\bar{\boldsymbol{y}}) = \mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p})$ se e só se $\mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p})$ é diferenciável em $\bar{\boldsymbol{p}}$ e $\nabla\mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p}) = -\bar{\boldsymbol{y}}$. Definindo $\pi(\boldsymbol{p}) = -\mu_{-\mathbb{Y}}(\boldsymbol{p})$ temos o resultado.

Propriedades da Função Oferta

1) Se $\mathbb{Y}$ é convexo, o conjunto $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ é convexo para todo $\boldsymbol{p}$**.** Se $\mathbb{Y}$ *é estritamente convexo, o conjunto $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ é um único ponto (ou é vazio).*

Demonstração: Se $\boldsymbol{y}_0$ e $\boldsymbol{y}_1$ pertencem a $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ então ambos pertencem a $\mathbb{Y}$ e são tais que $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}_1 = \pi(\boldsymbol{y})$. Tome, então algum vetor $\boldsymbol{y}_2 = \lambda \boldsymbol{y}_0 + (1 - \lambda) \boldsymbol{y}_1$. Como $\mathbb{Y}$ é convexo, então $\boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{Y}$. Além disso $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}_2 = \pi(\boldsymbol{y})$. Se $\mathbb{Y}$ for estritamente convexo, e $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{y}_1$, então $\boldsymbol{y}_2$ pertencerá ao interior de $\mathbb{Y}$. Basta então escolher um plano de produção com menos insumos ou mais produtos suficientemente próximo de $\boldsymbol{y}_2$ e o lucro será maior.

Propriedades da Função Oferta

1) Se $\mathbb{Y}$ *é convexo, o conjunto* $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ é convexo para todo $\boldsymbol{p}$. Se $\mathbb{Y}$ *é estritamente convexo, o conjunto* $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ *é um único ponto (ou é vazio).*

Demonstração: Se $\boldsymbol{y}_0$ e $\boldsymbol{y}_1$ pertencem a $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ então ambos pertencem a $\mathbb{Y}$ e são tais que $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}_1 = \pi(\boldsymbol{y})$. Tome, então algum vetor $\boldsymbol{y}_2 = \lambda \boldsymbol{y}_0 + (1-\lambda)\boldsymbol{y}_1$. Como $\mathbb{Y}$ é convexo, então $\boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{Y}$. Além disso $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}_2 = \pi(\boldsymbol{y})$. Se $\mathbb{Y}$ for estritamente convexo, e $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{y}_1$, então $\boldsymbol{y}_2$ pertencerá ao interior de $\mathbb{Y}$. Basta então escolher um plano de produção com menos insumos ou mais produtos suficientemente próximo de $\boldsymbol{y}_2$ e o lucro será maior.

2) *Se* $\boldsymbol{y}(\bar{\boldsymbol{p}})$ *é diferenciável em* $\bar{\boldsymbol{p}}$, $\partial_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}(\bar{\boldsymbol{p}}) = \partial^2_{\boldsymbol{pp}} \pi(\bar{\boldsymbol{p}})$ *é simétrica e positiva semi-definida (semi, já que* $D^2 \pi(\bar{\boldsymbol{p}}) \bar{\boldsymbol{p}} = \mathbf{0}$*)*

Agregação

Definição: Sejam as funções lucro e as correspondências de oferta individuais, $\pi^j(\boldsymbol{p})$ e $\boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$. A *função oferta agregada* é:

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) \equiv \sum_j \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p}) \equiv \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^L ; \boldsymbol{y} = \sum_j \boldsymbol{y}_j \text{ para algum } \boldsymbol{y}_j \in \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p}) \right\}$$

Agregação

Definição: Sejam as funções lucro e as correspondências de oferta individuais, $\pi^j(\boldsymbol{p})$ e $\boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$. A *função oferta agregada* é:

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) \equiv \sum_j \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p}) \equiv \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^L; \boldsymbol{y} = \sum_j \boldsymbol{y}_j \text{ para algum } \boldsymbol{y}_j \in \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})\right\}$$

Suponha que $\boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$ são funções diferenciáveis aos preços $\boldsymbol{p}$, então $\partial_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$ é positiva semi-definida e simétrica.

Agregação

Definição: Sejam as funções lucro e as correspondências de oferta individuais, $\pi^j(\boldsymbol{p})$ e $\boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$. A *função oferta agregada* é:

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) \equiv \sum_j \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p}) \equiv \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^L; \boldsymbol{y} = \sum_j \boldsymbol{y}_j \text{ para algum } \boldsymbol{y}_j \in \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})\right\}$$

Suponha que $\boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$ são funções diferenciáveis aos preços $\boldsymbol{p}$, então $\partial_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$ é positiva semi-definida e simétrica.
Como essas duas propriedades são preservadas pela adição temos que $\partial_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) = \sum_j \partial_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$ é também positiva semi-definida e simétrica.

Defina

$$\mathbb{Y} \equiv \sum_j \mathbb{Y}_j \equiv \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^L ; \boldsymbol{y} = \sum_j \boldsymbol{y}^j \text{ para algum } \boldsymbol{y}^j \in \mathbb{Y}_j, j = 1, ..., J \right\}$$

como o cojunto de possibilidades de produção agregado. E sejam $\pi^* (\boldsymbol{p})$ e $\boldsymbol{y}^* (\boldsymbol{p})$, respectivamente, a função lucro e a correspondência de oferta associadas a esse conjunto $\mathbb{Y}$.

Defina

$$\mathbb{Y} \equiv \sum_j \mathbb{Y}_j \equiv \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^L ; \boldsymbol{y} = \sum_j \boldsymbol{y}^j \text{ para algum } \boldsymbol{y}^j \in \mathbb{Y}_j, j = 1, ..., J \right\}$$

como o cojunto de possibilidades de produção agregado. E sejam $\pi^* (\boldsymbol{p})$ e $\boldsymbol{y}^* (\boldsymbol{p})$, respectivamente, a função lucro e a correspondência de oferta associadas a esse conjunto $\mathbb{Y}$.

Teorema: *Para todo* $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$, *temos que:*

i) $\pi^* (\boldsymbol{p}) = \sum_j \pi^j (\boldsymbol{p})$;

ii) $\boldsymbol{y}^* (\boldsymbol{p}) = \sum_j \boldsymbol{y}^j (\boldsymbol{p}) \left(= \left\{ \sum_j \boldsymbol{y}_j ; \boldsymbol{y}_j \in \boldsymbol{y}^j (\boldsymbol{p}) \ \forall j \right\} \right)$

Demonstração: (i) Considere qualquer conjunto de planos de produção individuais

$$\left\{\boldsymbol{y}^{j}\right\}_{j=1}^{J} \text{ com } \boldsymbol{y}^{j} \in \mathbb{Y}^{j}\ \forall j, \tag{2}$$

então, $\sum_j \boldsymbol{y}_j \subseteq \mathbb{Y}$, donde

$$\pi^{*}\left(\boldsymbol{p}\right) \geq \boldsymbol{p} \cdot \sum_j \boldsymbol{y}_j = \sum_j \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{y}_j .$$

Em particular, $\boldsymbol{y}_j \in \boldsymbol{y}_j\left(\boldsymbol{p}\right) \Rightarrow \pi^{*}\left(\boldsymbol{p}\right) \geq \sum_j \pi^{j}\left(\boldsymbol{p}\right).$
Considere agora um $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$ qualquer. Pela definição de $\mathbb{Y}$, há vetores $\boldsymbol{y}_j \in \mathbb{Y}^{j}$ tais que $\sum_j \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{y}$. Então,
$\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{y} = \boldsymbol{p} \cdot \sum_j \boldsymbol{y}_j = \sum_j \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{y}_j \leq \sum_j \pi^{j}\left(\boldsymbol{p}\right).$ Como vale para todo $\boldsymbol{y}$, em particular vale para $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{y}^{*}\left(\boldsymbol{p}\right).$ Portanto,
$\pi^{*}\left(\boldsymbol{p}\right) \leq \sum_j \pi^{j}\left(\boldsymbol{p}\right).$

(ii) Considere novamente (2), e suponha $\boldsymbol{y}_j \in \boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{p})\ \forall j$. Então, por (i), $\boldsymbol{p} \cdot \sum_j \boldsymbol{y}_j = \sum_j \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}_j = \sum_j \pi^j(\boldsymbol{p}) = \pi^*(\boldsymbol{p})$. Logo, $\sum_j \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p}) \subseteq \boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{p})$.

Tome agora $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{p})$. Como $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$, $\boldsymbol{y} = \sum_j \boldsymbol{y}_j$ com $\boldsymbol{y}_j \in \mathbb{Y}^j$ $\forall j$. Além disso, $\boldsymbol{p} \cdot \sum_j \boldsymbol{y}_j = \pi^*(\boldsymbol{p}) = \sum_j \pi^j(\boldsymbol{p})$ (também por (i)). Para cada j, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j \leq \pi^j(\boldsymbol{p})$ pela definição de $\pi^j(\boldsymbol{p})$. Portanto, para que $\pi^*(\boldsymbol{p}) = \sum_j \pi^j(\boldsymbol{p})$ é preciso que $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}_j = \pi^j(\boldsymbol{p})$ para todo j. Neste caso, $\boldsymbol{y} = \sum_j \boldsymbol{y}_j \in \sum_j \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$, donde $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{p}) \subseteq \sum_j \boldsymbol{y}^j(\boldsymbol{p})$.

Eficiência

Definição: Dizemos que um vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$ é *eficiente* quando não existe nenhum outro $\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{Y}$ tal que $\hat{\boldsymbol{y}} > \boldsymbol{y}$.

Eficiência

Definição: Dizemos que um vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$ é *eficiente* quando não existe nenhum outro $\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{Y}$ tal que $\hat{\boldsymbol{y}} > \boldsymbol{y}$.

Teorema: *Se $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}$ é um vetor que maximiza lucros para algum vetor de preços $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$, então $\boldsymbol{y}$ é eficiente.*
Demonstração: Suponha que não, i.e., tome $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{y}^* (\boldsymbol{p})$ e suponha que existe $\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{Y}$ tal que $\hat{\boldsymbol{y}} > \boldsymbol{y}$. Como $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$, temos que $\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{p} \cdot (\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}) > 0$, o que contradiz $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{y}^* (\boldsymbol{p})$.

Teorema: *Suponha que* $\mathbb{Y}$ *é convexo. Então, para todo* $\boldsymbol{y}$ *eficiente,* $\boldsymbol{y}$ *é a escolha maximizadora de lucro para algum vetor de preços* $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$.

Teorema: *Suponha que $\mathbb{Y}$ é convexo. Então, para todo $\boldsymbol{y}$ eficiente, $\boldsymbol{y}$ é a escolha maximizadora de lucro para algum vetor de preços $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$.*

Demonstração: Tome $\boldsymbol{y}$ eficiente, e defina $P_y \equiv \left\{\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^L; \hat{\boldsymbol{y}} \gg \boldsymbol{y}\right\}$. Como $\boldsymbol{y}$ é eficiente $\mathbb{Y} \cap P_y = \varnothing$. *i)* Notando que P_y é convexo, temos, pelo teorema do hiperplano separador que $\exists\ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^L$, $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{p} \cdot \widehat{\hat{\boldsymbol{y}}}\ \forall\ \hat{\boldsymbol{y}} \in P_y$ e $\widehat{\hat{\boldsymbol{y}}} \in \mathbb{Y}$;

ii) Em particular, $\boldsymbol{p} \cdot (\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}) \geq 0$, $\forall \hat{\boldsymbol{y}} \gg \boldsymbol{y}$, donde $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$ (do contrário, se houvesse $p_l < 0$, pegaríamos um vetor $\hat{\boldsymbol{y}} \gg \boldsymbol{y}$ cuja entrada $\hat{y}_l$ fosse suficientemente maior que y_l para violar a desigualdade $\boldsymbol{p} \cdot (\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}) \geq 0$)

Teorema: *Suponha que* $\mathbb{Y}$ *é convexo. Então, para todo* $\boldsymbol{y}$ *eficiente,* $\boldsymbol{y}$ *é a escolha maximizadora de lucro para algum vetor de preços* $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$.

Demonstração: Tome $\boldsymbol{y}$ eficiente, e defina $P_y \equiv \left\{\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^L; \hat{\boldsymbol{y}} \gg \boldsymbol{y}\right\}$. Como $\boldsymbol{y}$ é eficiente $\mathbb{Y} \cap P_y = \varnothing$. *i)* Notando que P_y é convexo, temos, pelo teorema do hiperplano separador que $\exists\ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^L$, $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{p} \cdot \widehat{\hat{\boldsymbol{y}}}\ \forall\ \hat{\boldsymbol{y}} \in P_y$ e $\widehat{\hat{\boldsymbol{y}}} \in \mathbb{Y}$;

ii) Em particular, $\boldsymbol{p} \cdot (\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}) \geq 0$, $\forall \hat{\boldsymbol{y}} \gg \boldsymbol{y}$, donde $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$ (do contrário, se houvesse $p_l < 0$, pegaríamos um vetor $\hat{\boldsymbol{y}} \gg \boldsymbol{y}$ cuja entrada $\hat{y}_l$ fosse suficientemente maior que y_l para violar a desigualdade $\boldsymbol{p} \cdot (\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}) \geq 0$)

iii) Considere agora $\bar{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{Y}$. Neste caso, $\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{p} \cdot \bar{\boldsymbol{y}}\ \forall\ \hat{\boldsymbol{y}} \in P_{\boldsymbol{y}}$. Como $\hat{\boldsymbol{y}}$ pode ser escolhido arbitrariamente próximo de $\boldsymbol{y}$, concluimos que $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{p} \cdot \bar{\boldsymbol{y}}\ \forall\ \bar{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{Y}$.

Firma de Produto Único

Podemos representar a tecnologia por meio de uma *função de produção* $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$

Firma de Produto Único

Podemos representar a tecnologia por meio de uma *função de produção* $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$

Neste caso,

$$\mathbb{Y} \equiv \left\{ (y_0, -y_1, ..., -y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; y_0 - f\,(y_1, ..., y_n) \leq 0 \right\}$$

Firma de Produto Único

Podemos representar a tecnologia por meio de uma *função de produção* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$

Neste caso,

$$\mathbb{Y} \equiv \left\{ (y_0, -y_1, ..., -y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; y_0 - f\,(y_1, ..., y_n) \leq 0 \right\}$$

Hipótese: Propriedades da função de produção: *i)* contínua; *ii)* estritamente crescente; *iii)* estritamente quase-côncava e; *iv)* $f\,(\mathbf{0}) = 0$.

Definição: *Isoquanta* é o conjunto de combinações de insumos que produzem exatamente y.:

$$Q(y) \equiv \{\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \mid f(\boldsymbol{x}) = y\}$$

Definição: *Isoquanta* é o conjunto de combinações de insumos que produzem exatamente y.:

$$Q(y) \equiv \{\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \mid f(\boldsymbol{x}) = y\}$$

Definição: A *Taxa marginal de substituição técnica* (TMST) é

$$TMST_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial_i f(\boldsymbol{x})}{\partial_j f(\boldsymbol{x})}$$

Definição: *Isoquanta* é o conjunto de combinações de insumos que produzem exatamente y.:

$$Q(y) \equiv \{\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \mid f(\boldsymbol{x}) = y\}$$

Definição: A *Taxa marginal de substituição técnica* (TMST) é

$$TMST_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial_i f(\boldsymbol{x})}{\partial_j f(\boldsymbol{x})}$$

Definição: $\partial_i f(\boldsymbol{x})$ é a *produtividade marginal do insumo* i.

Minimização de Custos

Firma *competitiva no mercado de fatores*; i.e., toma o vetor de preços dos insumos $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$ como dado.
A firma quer produzir y da forma mais eficiente possível.

Minimização de Custos

Firma *competitiva no mercado de fatores*; i.e., toma o vetor de preços dos insumos $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$ como dado.
A firma quer produzir y da forma mais eficiente possível.

O problema da firma define a *função custo*,

$$c(\boldsymbol{w}, y) \equiv \begin{cases} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } f(\boldsymbol{x}) \geq y \end{cases} \quad (3)$$

Minimização de Custos

Firma *competitiva no mercado de fatores*; i.e., toma o vetor de preços dos insumos $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$ como dado.
A firma quer produzir y da forma mais eficiente possível.

O problema da firma define a *função custo*,

$$c(\boldsymbol{w}, y) \equiv \begin{cases} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } f(\boldsymbol{x}) \geq y \end{cases} \tag{3}$$

e a *demanda condicional de insumos*,

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, y) \equiv \begin{cases} \arg\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } f(\boldsymbol{x}) \geq y \end{cases},$$

Minimização de Custos

Firma *competitiva no mercado de fatores*; i.e., toma o vetor de preços dos insumos $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$ como dado.
A firma quer produzir y da forma mais eficiente possível.

O problema da firma define a *função custo*,

$$c(\boldsymbol{w}, y) \equiv \begin{cases} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } f(\boldsymbol{x}) \geq y \end{cases} \tag{3}$$

e a *demanda condicional de insumos*,

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, y) \equiv \begin{cases} \arg\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } f(\boldsymbol{x}) \geq y \end{cases},$$

Naturalmente,

$$c(\boldsymbol{w}, y) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, y),$$

Propriedades da função custo: se $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(\boldsymbol{w}, y)$ é

Propriedades da função custo: se $f(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(\boldsymbol{w}, y)$ é
1) *Igual a zero quando* $y = 0$.

Propriedades da função custo: se $f(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(\boldsymbol{w}, y)$ é
1) *Igual a zero quando* $y = 0$.
2) *Contínua em* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$.

Propriedades da função custo: se $f(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(\boldsymbol{w}, y)$ é

1) *Igual a zero quando* $y = 0$.
2) *Contínua em* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$.
3) *Estritamente crescente e sem limite superior em* y $(\forall\ \boldsymbol{w} \gg \mathbf{0})$

Propriedades da função custo: se $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(\boldsymbol{w}, y)$ é
1) *Igual a zero quando* $y = 0$.
2) *Contínua em* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$.
3) *Estritamente crescente e sem limite superior em* y $(\forall\ \boldsymbol{w} \gg \mathbf{0})$
4) *Crescente em* $\boldsymbol{w}$.

Propriedades da função custo: se $f(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(\boldsymbol{w}, y)$ é

1) *Igual a zero quando* $y = 0$.
2) *Contínua em* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$.
3) *Estritamente crescente e sem limite superior em* y $(\forall\ \boldsymbol{w} \gg \mathbf{0})$
4) *Crescente em* $\boldsymbol{w}$.
5) *Homogênea de grau 1 em* $\boldsymbol{w}$

Propriedades da função custo: se $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(\boldsymbol{w}, y)$ é

1) *Igual a zero quando* $y = 0$.
2) *Contínua em* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$.
3) *Estritamente crescente e sem limite superior em* y $(\forall\ \boldsymbol{w} \gg \mathbf{0})$
4) *Crescente em* $\boldsymbol{w}$.
5) *Homogênea de grau 1 em* $\boldsymbol{w}$
6) *Côncava em* $\boldsymbol{w}$

Propriedades da função custo: se $f(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(\boldsymbol{w}, y)$ é

1) *Igual a zero quando* $y = 0$.
2) *Contínua em* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$.
3) *Estritamente crescente e sem limite superior em* y $(\forall\ \boldsymbol{w} \gg \mathbf{0})$
4) *Crescente em* $\boldsymbol{w}$.
5) *Homogênea de grau 1 em* $\boldsymbol{w}$
6) *Côncava em* $\boldsymbol{w}$
7) *Lema de Shephard: se* $c(\boldsymbol{w}, y)$ *é diferenciável no ponto* $(\boldsymbol{w}^0, y^0)$ *e* $\boldsymbol{w}^0 \gg \mathbf{0}$, *então*

$$\partial_i c(\boldsymbol{w}^0, y^0) = x_i(\boldsymbol{w}^0, y^0)$$

Propriedades testáveis da minimização de custos:

Propriedades testáveis da minimização de custos:
1) *A matriz de substituição é simétrica e negativa semi-definida*

$$\sigma^*(\boldsymbol{w}, y) \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 x_1(\boldsymbol{w}, y) & \dots & \partial_n x_1(\boldsymbol{w}, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 x_n(\boldsymbol{w}, y) & \dots & \partial_n x_n(\boldsymbol{w}, y) \end{pmatrix}$$

Propriedades testáveis da minimização de custos:
1) *A matriz de substituição é simétrica e negativa semi-definida*

$$\sigma^*(\boldsymbol{w}, y) \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 x_1(\boldsymbol{w}, y) & ... & \partial_n x_1(\boldsymbol{w}, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 x_n(\boldsymbol{w}, y) & ... & \partial_n x_n(\boldsymbol{w}, y) \end{pmatrix}$$

2) *Homogeneidade de grau zero em* $\boldsymbol{w}$

$$x_i(t\boldsymbol{w}, y) = x_i(\boldsymbol{w}, y) \quad \forall t > 0$$

Curto e Longo Prazos

Definição Seja $(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})$ um vetor de insumos tal que $\boldsymbol{x}$ são insumos variáveis e $\overline{\boldsymbol{x}}$ insumos fixos.
Sejam $\boldsymbol{w}$ e $\overline{\boldsymbol{w}}$ os respectivos vetores de preços.
A *função custo de curto prazo* é

$$c^{sr}\left(\boldsymbol{w},\overline{\boldsymbol{w}},y;\overline{\boldsymbol{x}}\right) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{w}}\cdot\overline{\boldsymbol{x}} \\ \text{s.a. } f\left(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}\right)\geq y \end{array} \right.$$

$$= \overline{\boldsymbol{w}}\cdot\overline{\boldsymbol{x}} + \left\{ \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} \\ \text{s.a. } f\left(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}\right)\geq y \end{array} \right. \quad (4)$$

Curto e Longo Prazos

Definição Seja $(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})$ um vetor de insumos tal que $\boldsymbol{x}$ são insumos variáveis e $\overline{\boldsymbol{x}}$ insumos fixos.
Sejam $\boldsymbol{w}$ e $\overline{\boldsymbol{w}}$ os respectivos vetores de preços.
A *função custo de curto prazo* é

$$c^{sr}\left(\boldsymbol{w},\overline{\boldsymbol{w}},y;\overline{\boldsymbol{x}}\right) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{w}}\cdot\overline{\boldsymbol{x}} \\ \text{s.a. } f\left(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}\right)\geq y \end{array} \right.$$

$$= \overline{\boldsymbol{w}}\cdot\overline{\boldsymbol{x}} + \left\{ \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} \\ \text{s.a. } f\left(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}\right)\geq y \end{array} \right. \tag{4}$$

$\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{w},\overline{\boldsymbol{w}},y;\overline{\boldsymbol{x}}\right)$ é a solução de (4)

Teorema: *O custo de longo prazo nunca é maior que o custo de curto prazo.*

Teorema: *O custo de longo prazo nunca é maior que o custo de curto prazo.*
Demonstração: Seja

$$\overline{\boldsymbol{x}}\left(y;\boldsymbol{w},\overline{\boldsymbol{w}}\right)\equiv\begin{cases}\arg\min\limits_{\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n_+}\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{w},\overline{\boldsymbol{w}},y;\overline{\boldsymbol{x}}\right)+\overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}}\\ \text{s.a.}\quad f\left[\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{w},\overline{\boldsymbol{w}},y;\overline{\boldsymbol{x}}\right),\overline{\boldsymbol{x}}\right]\geq y\end{cases},$$

a escolha ótima dos insumos fixos. Chamaremos $\overline{\boldsymbol{x}}\left(y;\boldsymbol{w},\overline{\boldsymbol{w}}\right)$ de $\overline{\boldsymbol{x}}\left(y\right)$

Teorema: *Para todo* $(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y)$,

$$c(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y) = c^{sr}(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \overline{\boldsymbol{x}}(y))$$

Teorema: *Para todo* $(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y)$,

$$c(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y) = c^{sr}(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \overline{\boldsymbol{x}}(y))$$

Demonstração: Pelo terorema anterior, $c(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y) \leq c^{sr}(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \overline{\boldsymbol{x}}(y))$. Suponha,

$$c(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y) < c^{sr}(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \overline{\boldsymbol{x}}(y)).$$

então existe $\hat{\boldsymbol{x}}$ tal que

$$c(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y) = \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \hat{\boldsymbol{x}}) + \overline{\boldsymbol{w}}\hat{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \overline{\boldsymbol{x}}(y)) + \overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{x}}(y).$$

Mas isso contradiz a definição de $\overline{\boldsymbol{x}}(y)$.

Teorema: *Para todo* $(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y)$,

$$\partial_y c\left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y\right) = \partial_y c^{sr}\left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \overline{\boldsymbol{x}}\left(y\right)\right).$$

Demonstração: (teorema do envelope) Sabemos que

$$c\left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y\right) \equiv \min_{\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n_+} c^{sr}\left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \overline{\boldsymbol{x}}\right)$$

O que implica em

$$\partial_y c\left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y\right) = \partial_y c^{sr}\left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, y; \overline{\boldsymbol{x}}(y)\right)$$

Custos: Médio e Marginal, Fixo e Variável

Custo marginal

$$MC \equiv \partial_y c\left(y, \boldsymbol{w}\right).$$

Custo médio

$$AC \equiv c\left(y, \boldsymbol{w}\right)/y.$$

Custos: Médio e Marginal, Fixo e Variável

Custo marginal

$$MC \equiv \partial_y c\left(y, \boldsymbol{w}\right).$$

Custo médio

$$AC \equiv c\left(y, \boldsymbol{w}\right)/y.$$

- *Custos fixos*, FC, independem do nível de produção da firma.
- *Custos variáveis,*VC dependem do nível de produção da firma.
- *Custo total*, C, é $C \equiv FC + VC$.
- $MC = \partial_y C = \partial_y \left(FC + VC\right) = \partial_y VC$.
- $AC = C/y = \left(FC + VC\right)/y = AFC + AVC$, onde AFC é o *custo fixo médio* e AVC é o *custo variável* médio.

Maximização de Lucro

Hipótese: A firma é competitiva no mercado de produto também, i.e., p é dado.

Maximização de Lucro

Hipótese: A firma é competitiva no mercado de produto também, i.e., p é dado.

O problema da firma é

$$\max_{(y,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}_+^{n+1}} py - \boldsymbol{w}\textbf{Demonstração:}\boldsymbol{x} \text{ sujeito a } f\left(\boldsymbol{x}\right) \geq y.$$

Existência: O lucro máximo nem sempre existe.

Existência: O lucro máximo nem sempre existe.
Exemplo: Suponha f homogênea de grau $k > 1$–i.e., $f(t\boldsymbol{x}) > tf(\boldsymbol{x})$, para todo $t > 1$–e admita a possibilidade de inação.
Seja $\boldsymbol{x}'$ candidato a solução para o problema de maximização de lucros. Como $f(t\boldsymbol{x}') > tf(\boldsymbol{x}')$ temos que

$$\begin{aligned} pf\left(t\boldsymbol{x}'\right) - \boldsymbol{w} \cdot t\boldsymbol{x}' &> ptf\left(\boldsymbol{x}'\right) - \boldsymbol{w} \cdot t\boldsymbol{x}' \\ &= t\left[pf\left(\boldsymbol{x}'\right) - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}'\right] \geq pf\left(\boldsymbol{x}'\right) - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}', \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{x}'$ não maximiza lucro (contradição).

Oferta da Firma

Proposição: *Maximização de lucros implica em minimização de custos*

Demonstração Suponha que y^* é o nível de produção que maximiza lucro e $\boldsymbol{x}^*$ o vetor de insumos utilizados para produzir y^*. Suponha porém que exista um outro vetor de insumos $\hat{\boldsymbol{x}}$ tal que $f\left(\hat{\boldsymbol{x}}\right) \geq y^*$, e $\boldsymbol{w} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}^*$. Então o lucro associado a utilizar $\hat{\boldsymbol{x}}$ é: $pf\left(\hat{\boldsymbol{x}}\right) - \boldsymbol{w} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \geq py^* - \boldsymbol{w} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} > py^* - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}^*$ o que contradiz a hipótese de que $\boldsymbol{x}^*$ maximize lucro.

Escrever o problema da forma em dois estágios.
Primeiro, achamos $c\left(\boldsymbol{w}, y\right)$. Em seguida resolvemos

$$\max_{y \in \mathbb{R}_+} py - c\left(\boldsymbol{w}, y\right).$$

Escrever o problema da forma em dois estágios.
Primeiro, achamos $c(\boldsymbol{w}, y)$. Em seguida resolvemos

$$\max_{y \in \mathbb{R}_+} py - c(\boldsymbol{w}, y).$$

Condições de primeira e segunda ordens são, respectivamente,

$$p = \partial_y c(\boldsymbol{w}, y) \text{ e } \partial^2_{yy} c(\boldsymbol{w}, y) \geq 0,$$

A função custo será convexa em y se o conjunto $\mathbb{Y}$ for convexo.

Teorema (condição de encerramento de operação): *Uma firma nunca produzirá uma quantidade positiva no curto prazo se o preço for menor do que o custo variável médio,*
$p < avc\left(y^*\right) = vc\left(y^*\right)/y^*$.

Teorema (condição de encerramento de operação): *Uma firma nunca produzirá uma quantidade positiva no curto prazo se o preço for menor do que o custo variável médio,* $p < avc\,(y^*) = vc\,(y^*)\,/y^*$.

Definição: Definimos o *excedente do produtor* como a diferença entre as receitas e os custos variáveis.

$$vc\,(y, \boldsymbol{w}) \equiv \int_0^y \partial_v c\,(v, \boldsymbol{w})\,dv$$

Teorema (condição de encerramento de operação): *Uma firma nunca produzirá uma quantidade positiva no curto prazo se o preço for menor do que o custo variável médio,* $p < avc(y^*) = vc(y^*)/y^*$.

Definição: Definimos o *excedente do produtor* como a diferença entre as receitas e os custos variáveis.

$$vc(y, \boldsymbol{w}) \equiv \int_0^y \partial_v c(v, \boldsymbol{w})\, dv$$

Portanto, o excedente do produtor, é

$$ep(y, \boldsymbol{w}) \equiv \int_0^y (p - \partial_v c(v, \boldsymbol{w}))\, dv.$$

Ou seja, a área entre o preço e a curva de custo marginal.

A demanda de insumos é mais (negativamente) inclinada do que a demanda condicional de insumos.

A demanda de insumos é mais (negativamente) inclinada do que a demanda condicional de insumos.

Escreva $\hat{x}^i(\boldsymbol{w}, y(p, \boldsymbol{w})) \equiv x(p, \boldsymbol{w})$. Então,

$$\partial_i \hat{x}^i + \partial_y \hat{x}^i \partial_i y = \partial_i x^i. \tag{5}$$

Por outro lado, da maximização de lucros temos que
$\partial_y c(w, y) = p$, e $\partial_{yy}^2 c(w, y) \geq 0$.
Para p fixo,

$$\frac{dy}{dw_i} = -\frac{\partial_{yi}^2 c(w, y)}{\partial_{yy}^2 c(w, y)} = -\frac{\partial_{iy}^2 c(w, y)}{\partial_{yy}^2 c(w, y)} = -\frac{\partial_y \hat{x}^i(w, y)}{\partial_{yy}^2 c(w, y)} \tag{6}$$

De (5) e (6) temos que

$$\partial_i \hat{x}^i > \partial_i \hat{x}^i - \frac{\left(\partial_y \hat{x}^i\right)^2}{\partial_{yy}^2 c(w, y)} = \partial_i x^i,$$

como queríamos demonstrar.

Sobre os Objetivos da Firma

Toda firma j, caracterizada por seu conjunto de possibilidades de produção $\mathbb{Y}^j$, é de propriedade de indivíduos.
A participação acionária do indivíduo i na firma j é θ_j^i. θ_j^i também é a porcentagem do lucro da firma j que cabe ao indivíduo i.Naturalmente $\sum_i \theta_j^i = 1\ \forall j$.
A restrição orçamentária do indivíduo é, neste caso,

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^i \leq \boldsymbol{p} \cdot \bar{\boldsymbol{x}}^i + \sum_j \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}^j, \tag{7}$$

onde $\bar{\boldsymbol{x}}^i$ é a dotação inicial do indivíduo i.
Para qualquer firma j, tomadora de preços, $\boldsymbol{y}^j$ somente afeta o indivíduo aumentando ou diminuindo o lado direito de (7). Como $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}^j \leq \pi^j(\boldsymbol{p})\ \forall \boldsymbol{y}^j \in \mathbb{Y}^j$, a estratégia que mais beneficia os seus acionistas é escolher $\boldsymbol{y}^j \in \arg\max_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Y}^j} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}$.

Hipóteses implícitas:

1. preços são fixos e não dependem da ação da firma;
2. lucros são determinísticos, e;
3. acionistas administram a firma.

Hipóteses implícitas:

1. preços são fixos e não dependem da ação da firma;
2. lucros são determinísticos, e;
3. acionistas administram a firma.

1. Se os preços forem passíveis de manipulação pela firma (não-concorrencial), então um novo canal de influência do comportamento da firma no comportamento dos agentes aparece.

2. A produção é vendida antes ou depois de resolvida a incerteza? Se for depois o argumento de unanimidade de escolha de maximização de lucro deixa de valer. Em um ambiente com incerteza cabe, de fato, falar em lucro esperado. Será que a firma deve maximizar o lucro esperado? Qualquer um minimamente familiarizado com apreçamento de ativos sabe que os fluxos devem ser 'ajustados pelo risco.' Porém, com mercados incompletos, (esses conceitos ficarão mais claros ao estudarmos equilíbrio geral) não há unanimidade sobre o 'valor do lucro', já que cada indivíduo pode atribuir um valor diferente a lucros que ocorram em estados da natureza distintos. Naturalmente, se os mercados forem completos, mais uma vez o objetivo de maximização de lucro esperado volta a ser unanimidade.

3. Em muitos casos os administradores não são os donos das firmas. Neste caso, pode haver conflito de interesses entre os objetivos dos administradores e os objetivos dos donos das firmas. Parte imporante dos estudos de finanças corporativas estão relacionados aos contratos que permitem alinhar os interesses de administradores e acionistas.