Micro: Aula 01

A Escolha Individual

5 de outubro de 2015

Teoria da Escolha Individual

- Ideia é oferecer uma descrição (abstrata) de como escolhas são feitas
- Duas abordagens distintas (porém equivalentes):
  - Abordagem das Preferências
  - Teoria das Preferências Reveladas

Teoria das Preferências Reveladas

- considera a escolha em si como característica primitiva e impõe restrições de consistência diretamente sobre esse comportamento.
- hipótese central: Axioma fraco das preferências reveladas

Abordagem 'tradicional' das preferências

- define os gostos ou relações de preferência como as características primitivas (e estáveis) do indivíduo
- axiomas sobre as relações de preferência são impostos
- introduz-se uma hipótese de como escolhas são feitas dadas as preferências
- verifica-se as restrições observacionais geradas.

Elementos da Abordagem Tradicional

Abordagem tradicional formada por quatro elementos básicos

- Conjunto de Consumo
- Conjunto Factível (ou restrição orçamentária)
- Relação de preferências
- Hipótese Comportamental

O Espaço de Consumo

- **Conjunto de consumo**. Define a totalidade de possibilidades de consumo que um agente pode conceber.
- Restrições físicas e/ou institucionais definem o conjunto de consumo.
- Seja X o conjunto de consumo com elemento típico $\boldsymbol{x}$.
- Vamos sempre supor: *i)* $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n_+$; *ii)* X é fechado e convexo, e: *iii)* $\mathbf{0} \in X$.
- Na maioria dos casos $X = \mathbb{R}^n_+$, e $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ é uma cesta de consumo (plano de consumo, cesta de bens).
  - $x_i \geq 0$ é a quantidade consumida do bem i (good, commodity)

Conjunto Orçamentário

- **Conjunto Orçamentário,** subconjunto $\mathbb{B} \subset X$ que corresponde às alternativas factíveis para o agente.
- Conjunto orçamentário competitivo

$$\mathbb{B} \equiv \{\boldsymbol{x} \in X | \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \leq y\}$$

  onde $\boldsymbol{p}$ é o vetor de preços dos bens, $\boldsymbol{x}$ o vetor de quantidades e y a renda do indivíduo. Ou seja, o conjunto de cestas tais que $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq y$.
- Este é o conjunto orçamentário competitivo já que os preços não dependem da quantidade demandada.
- O 'conjunto orçamentário walrasiano', pressupõe implicitamente a existência de mercados eficientes e sem custos de transação.

Restrições Não-lineares

- Consideremos os seguintes exemplos de restrições não lineares.

1. Economia de escambo, preços de compra e venda podem ser diferentes, pois há custos em encontrar pessoas que queiram comprar os bens que você quer vender, ou pessoas que queiram vender os bens que você quer comprar. [existem custos de transação]
2. Tarifas de duas partes. [mercados não são competitivos e existem custos de transação]
3. Escolha intertemporal quando o mercado de capitais é imperfeito [existem custos de transação].
4. Escolha social quando redistribuição afeta a estrutura de incentivos. [mercados não competitivos e custos de transação]

Implicações da Restrição Linear

- Suponha a existência de uma função escolha. I.e., regra fixa que estabelece uma associação entre um conjunto orçamentário, $\mathbb{B}$, e uma cesta escolhida pelo agente $\boldsymbol{x} = C(\mathbb{B})$.
- Conjunto orçamentário competitivo é totalmente parametrizado por$(y, \boldsymbol{p})$
- Portanto, podemos representar essa função (regra) por $C(\mathbb{B}) \equiv \boldsymbol{x}\,(y, \boldsymbol{p})$,
  - para cada bem $i = 1, ..., n$,

    $$x_i = x_i\,(y, \boldsymbol{p})\,,$$

    a função de *demanda marshalliana*
- Hipótese crucial: indivíduos sempre escolhem uma cesta de consumo sobre a reta orçamentária (Não-saciedade *local*)

Adding-up:

$$\sum\nolimits_k p_k x_k(y, \boldsymbol{p}) = y$$

Com a hipótese adicional de que as demandas sejam diferenciáveis, temos que o adding-up implica

$$\sum\nolimits_k \partial_y x_k(y, \boldsymbol{p})\, p_k = 1,$$

e

$$\sum\nolimits_k \partial_i x_k(y, \boldsymbol{p})\, p_k + x_i = 0$$

Essas duas condições também são conhecidas como *agregação de Engel* e *agregação de Cournot*,

Homogeneidade: para todo escalar $\lambda > 0$, e todo bem, i, temos que

$$x_i\left(\lambda y, \lambda \boldsymbol{p}\right) = x_i\left(y, \boldsymbol{p}\right).$$

A propriedade é uma conseqüência imediata do fato de que $(\lambda y, \lambda \boldsymbol{p})$ e $(y, \boldsymbol{p})$ definem o mesmo conjunto, $\mathbb{B}$.

Homogeneidade: para todo escalar $\lambda > 0$, e todo bem, i, temos que

$$x_i\left(\lambda y, \lambda \boldsymbol{p}\right) = x_i\left(y, \boldsymbol{p}\right).$$

A propriedade é uma conseqüência imediata do fato de que $(\lambda y, \lambda \boldsymbol{p})$ e $(y, \boldsymbol{p})$ definem o mesmo conjunto, $\mathbb{B}$.
Se a função demanda for diferenciável, homogeneidade implica em

$$\partial_y x_i\left(y, \boldsymbol{p}\right) y + \sum_k \partial_k x_i\left(y, \boldsymbol{p}\right) p_k = 0$$

Todas as três propriedades podem ser escritas por meio de elasticidades.

Usando Elasticidades:

Usando Elasticidades:
Elasticidade-renda

$$\eta_i \equiv \partial_y x_i(\boldsymbol{p}, y) \frac{y}{x_i}$$

Usando Elasticidades:
Elasticidade-renda

$$\eta_i \equiv \partial_y x_i(\boldsymbol{p}, y)\frac{y}{x_i}$$

Elasticidade-Preço (quando $i \neq j$ elasticidade cruzada, quando $i = j$ elasticidade própria)

$$\varepsilon_{ij} \equiv \partial_j x_i(\boldsymbol{p}, y)\frac{p_j}{x_i}$$

- Agregação de Engel,

$$\sum_k \underbrace{\partial_y x_k\left(y, \boldsymbol{p}\right) \frac{y}{x_k}}_{\eta_k} \underbrace{\frac{p_k x_k}{y}}_{w_k} = 1.$$

- Agregação de Engel,

$$\sum_k \underbrace{\partial_y x_k (y, \boldsymbol{p}) \frac{y}{x_k}}_{\eta_k} \underbrace{\frac{p_k x_k}{y}}_{w_k} = 1.$$

Agregação de Cournot,

$$\sum_k \underbrace{\partial_i x_k (y, \boldsymbol{p}) \frac{p_i}{x_k}}_{\varepsilon_i^k} \underbrace{\frac{x_k p_k}{y}}_{w_k} + \underbrace{\frac{p_i x_i}{y}}_{w_i} = 0.$$

- Homogeneidade de grau zero

- Agregação de Engel,

$$\sum_k \underbrace{\partial_y x_k \left(y, \boldsymbol{p}\right) \frac{y}{x_k}}_{\eta_k} \underbrace{\frac{p_k x_k}{y}}_{w_k} = 1.$$

Agregação de Cournot,

$$\sum_k \underbrace{\partial_i x_k \left(y, \boldsymbol{p}\right) \frac{p_i}{x_k}}_{\varepsilon_i^k} \underbrace{\frac{x_k p_k}{y}}_{w_k} + \underbrace{\frac{p_i x_i}{y}}_{w_i} = 0.$$

- Homogeneidade de grau zero

$$\underbrace{\partial_y x_i \left(y, \boldsymbol{p}\right) \frac{y}{x_i}}_{\eta_i} + \sum_k \underbrace{\partial_k x_i \left(y, \boldsymbol{p}\right) \frac{p_k}{x_i}}_{\varepsilon_k^i} = 0.$$

São as únicas consequencias da restrição orçamentária

As Preferências

Preferências são representadas por uma relação binária, $\succeq$, definida em X tal que se $\boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2$, dizemos que $\boldsymbol{x}^1$ é preferível à cesta $\boldsymbol{x}^2$ (ou "pelo menos tão boa quanto").

Axioma 1 Completeza $\forall \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$ temos que ou $\boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2$ ou $\boldsymbol{x}^1 \preceq \boldsymbol{x}^2$ (ou ambos)

Axioma 2 Transitividade$\forall \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3$, temos que se $\boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2$ e $\boldsymbol{x}^2 \succeq \boldsymbol{x}^3$, então $\boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^3$

Definição *A relação binária $\succeq$ definida no conjunto de consumo X é chamada uma relação de preferência racional se satisfizer os axiomas 1 e 2.*

- A relação binária $\succ$ representa: $\boldsymbol{x}^1 \succ \boldsymbol{x}^2 \rightarrow \boldsymbol{x}^1$ é estritamente preferível a $\boldsymbol{x}^2$ (ou "é melhor do que"). É definida da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{x}^1 \succ \boldsymbol{x}^2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2 \text{ e } \boldsymbol{x}^2 \not\succeq \boldsymbol{x}^1.$$

- A relação binária $\succ$ representa: $\boldsymbol{x}^1 \succ \boldsymbol{x}^2 \rightarrow \boldsymbol{x}^1$ é estritamente preferível a $\boldsymbol{x}^2$ (ou "é melhor do que"). É definida da seguinte maneira:
$$\boldsymbol{x}^1 \succ \boldsymbol{x}^2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2 \text{ e } \boldsymbol{x}^2 \not\succeq \boldsymbol{x}^1.$$

A relação binária $\sim$ representa: $\boldsymbol{x}^1 \sim \boldsymbol{x}^2 \rightarrow \boldsymbol{x}^1$ é indiferente a $\boldsymbol{x}^2$. É definida da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{x}^1 \sim \boldsymbol{x}^2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2 \text{ e } \boldsymbol{x}^2 \succeq \boldsymbol{x}^1.$$

Tome qualquer cesta $\boldsymbol{x}^0 \in X$. Definimos, então, os seguintes conjuntos:

- $\succeq(\boldsymbol{x}^0) \equiv \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}, \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{x}^0\}$, cestas 'pelo menos tão boas quanto $\boldsymbol{x}^0$'.
- $\preceq(\boldsymbol{x}^0) \equiv \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}, \boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{x}^0\}$, cestas 'não melhores do que $\boldsymbol{x}^0$'.
- $\succ(\boldsymbol{x}^0) \equiv \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}, \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}^0\}$, cestas 'melhores do que $\boldsymbol{x}^0$'.
- $\prec(\boldsymbol{x}^0) \equiv \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}, \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{x}^0\}$, cestas 'piores do que $\boldsymbol{x}^0$'.
- $\sim(\boldsymbol{x}^0) \equiv \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}, \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}^0\}$, cestas 'indiferentes a $\boldsymbol{x}^0$'.

Axioma 3 Continuidade. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$, os conjuntos$\succeq(\boldsymbol{x})$, e $\preceq(\boldsymbol{x})$, são fechados em $\mathbb{R}^n_+$.

Axioma 3 Continuidade. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$, os conjuntos$\succeq(\boldsymbol{x})$, e $\preceq(\boldsymbol{x})$, são fechados em $\mathbb{R}^n_+$.

Axioma 4 Não-saciedade local. $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n_+$ e todo $\varepsilon > 0$, existe pelo menos um $\boldsymbol{x} \in B_\varepsilon\left(\boldsymbol{x}^0\right) \cap \mathbb{R}^n_+$ tal que $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}^0$.

Axioma 3 Continuidade. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$, os conjuntos$\succeq(\boldsymbol{x})$, e $\preceq(\boldsymbol{x})$, são fechados em $\mathbb{R}_+^n$.

Axioma 4 Monotonicidade estrita. $\forall \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in \mathbb{R}_+^n$, se $\boldsymbol{x}^0 \geq \boldsymbol{x}^1$, então $\boldsymbol{x}^0 \succeq \boldsymbol{x}^1$, e se $\boldsymbol{x}^0 \gg \boldsymbol{x}^1$, então $\boldsymbol{x}^0 \succ \boldsymbol{x}^1$.

Axioma 3 Continuidade. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$, os conjuntos$\succeq(\boldsymbol{x})$, e $\preceq(\boldsymbol{x})$, são fechados em $\mathbb{R}^n_+$.

Axioma 4 Monotonicidade estrita. $\forall \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$, se $\boldsymbol{x}^0 \geq \boldsymbol{x}^1$, então $\boldsymbol{x}^0 \succeq \boldsymbol{x}^1$, e se $\boldsymbol{x}^0 \gg \boldsymbol{x}^1$, então $\boldsymbol{x}^0 \succ \boldsymbol{x}^1$.

Axioma 5 Convexidade. Se $\boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^0$, então $t\boldsymbol{x}^1 + (1-t)\boldsymbol{x}^0 \succeq \boldsymbol{x}^0$, para todo $t \in [0, 1]$

Axioma 3 Continuidade. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$, os conjuntos$\succsim (\boldsymbol{x})$, e $\precsim (\boldsymbol{x})$, são fechados em $\mathbb{R}^n_+$.

Axioma 4 Monotonicidade estrita. $\forall \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$, se $\boldsymbol{x}^0 \geq \boldsymbol{x}^1$, então $\boldsymbol{x}^0 \succsim \boldsymbol{x}^1$, e se $\boldsymbol{x}^0 \gg \boldsymbol{x}^1$, então $\boldsymbol{x}^0 \succ \boldsymbol{x}^1$.

Axioma 5 Convexidade estrita. Se $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^0$ e $\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^0$, então $t\boldsymbol{x}^1 + (1-t)\,\boldsymbol{x}^0 \succ \boldsymbol{x}^0$, para todo $t \in (0,1)$

A Hipótese Comportamental

Hipótese comportamental: consumidores "racionais" escolhem a melhor (de acordo com suas ordenações de preferências) cesta $\boldsymbol{x}^*$ factível (i.e., dentro do conjunto orçamentário $\mathbb{B}$):

$$\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{B} \text{ tal que } \boldsymbol{x}^* \succeq \boldsymbol{x} \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}$$

A Hipótese Comportamental

Hipótese comportamental: consumidores "racionais" escolhem a melhor (de acordo com suas ordenações de preferências) cesta $\boldsymbol{x}^*$ factível (i.e., dentro do conjunto orçamentário $\mathbb{B}$):

$$\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{B} \text{ tal que } \boldsymbol{x}^* \succeq \boldsymbol{x} \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}$$

- O problema do consumidor tem solução quando $\mathbb{B} \equiv \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ ; \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \leq y\right\}$?

Sim!!! Quando as preferências são contínuas, temos que, para todo $\boldsymbol{x}^0$ o conjunto das cestas piores do que $\boldsymbol{x}^0$, $\prec\left(\boldsymbol{x}^0\right)$, é aberto em $\mathbb{R}_+^n$. Suponha que o problema do consumidor não tem solução, então todos os pontos $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}$ fazem parte de um conjunto $\prec\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ em que $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{B}$. Como todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}$ pertence a um desses conjuntos $\prec\left(\boldsymbol{x}^0\right)$, sob a hipótese de que o problema não tem solução, temos que o conjunto desses conjuntos cobre $\mathbb{B}$.
Sendo $\mathbb{B}$ um conjunto compacto, essa cobertura admite uma subcobertura finita $\prec\left(\boldsymbol{x}^i\right)$ $i = 1, ..., n$. Ou seja podemos considerar uma união finita de conjuntos $\prec\left(\boldsymbol{x}^i\right)$ que contém o conjunto $\mathbb{B}$. Tome $\boldsymbol{x}^*$ como a melhor escolha em $\left\{\boldsymbol{x}^i\right\}_{i=1}^n$, então temos que todo os outros elementos de $\mathbb{B}$ são piores do que $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{B}$, uma contradição.

A Função Utilidade

Definição *Uma função* $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *é uma função utilidade que representa a relação de preferências* $\succeq$ *se* $\forall x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n_+,\ u\left(\boldsymbol{x}^0\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^1\right) \Leftrightarrow x^0 \succeq x^1$.

Teorema

Se uma relação de preferências, $\succeq$, pode ser representada por uma função $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, então $\succeq$ é racional (i.e., completa e transitiva).

Teorema

Se uma relação de preferências, $\succeq$, pode ser representada por uma função $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, então $\succeq$ é racional (i.e., completa e transitiva).

Demonstração: *i)* Como u é uma função de X em $\mathbb{R}$, para quaisquer $\boldsymbol{x}^0$ e $\boldsymbol{x}^1 \in X$, ou $u\left(\boldsymbol{x}^0\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^1\right)$ ou $u\left(\boldsymbol{x}^1\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^0\right)$. Como u representa $\succeq$ então ou $\boldsymbol{x}^0 \succeq \boldsymbol{x}^1$ ou $\boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^0$. Portanto a relação é *completa*. *ii)* Suponha $\boldsymbol{x}^0 \succeq \boldsymbol{x}^1$ e $\boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2$. Então $u\left(\boldsymbol{x}^0\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^1\right)$ e $u\left(\boldsymbol{x}^1\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^2\right)$ o que implica em $u\left(\boldsymbol{x}^0\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^2\right)$. Como u representa $\succeq$ então $\boldsymbol{x}^0 \succeq \boldsymbol{x}^2$. Portanto a relação é *transitiva*.

Teorema

Se $\succeq$ *é completa, transitiva, contínua e estritamente monotônica, existe uma função real contínua* $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *que representa* $\succeq$ *.*

Teorema

Se $\succeq$ é completa, transitiva, contínua e estritamente monotônica, existe uma função real contínua $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ que representa $\succeq$.

Demonstração: Vamos construir essa função. Primeiro defina $\boldsymbol{\iota} \equiv (1, ..., 1) \in \mathbb{R}_+^n$. Então, pegue qualquer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$ e atribua a ele o número $u(\boldsymbol{x})$ tal que a cesta $u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\iota} \sim \boldsymbol{x}$. Eis nossa função utilidade. Temos somente que responder as seguintes questões: *i)* Esse número existe?; *ii)* É único?; *iii)* Ele representa as preferências?

Teorema

Se $\succeq$ é completa, transitiva, contínua e estritamente monotônica, existe uma função real contínua $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ que representa $\succeq$.

Demonstração: Vamos construir essa função. Primeiro defina $\boldsymbol{\iota} \equiv (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n_+$. Então, pegue qualquer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$ e atribua a ele o número $u(\boldsymbol{x})$ tal que a cesta $u(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\iota} \sim \boldsymbol{x}$. Eis nossa função utilidade. Temos somente que responder as seguintes questões: *i)* Esse número existe?; *ii)* É único?; *iii)* Ele representa as preferências? Vamos ainda mostrar que a função assim construída é contínua.

Existência: Fixe $\boldsymbol{x}$ e defina os seguintes sub-conjuntos de $\mathbb{R}_+$,

$$A \equiv \{\alpha \geq 0 | \alpha\boldsymbol{\iota} \succeq \boldsymbol{x}\} \text{ and } B \equiv \{\alpha \geq 0 | \alpha\boldsymbol{\iota} \preceq \boldsymbol{x}\}$$

Continuidade de $\succeq$ garante que os dois conjuntos A e B são fechados em $\mathbb{R}_+$. Por outro lado, monotonicidade estrita, garante que $\alpha \in A$ e $\alpha' \geq \alpha$ impliquem em $\alpha' \in A$. Logo A é um intervalo fechado do tipo $[\underline{\alpha}, \infty)$. Por argumentos análogos, B é um intervalo do tipo $[0, \overline{\alpha}]$. Finalmente, completeza de $\succeq$ garante que $\mathbb{R}_+ = A \cup B = [0, \overline{\alpha}] \cup [\underline{\alpha}, \infty)$. Isso só é possível se $\underline{\alpha} \leq \overline{\alpha}$, o que quer dizer que $A \cap B \neq \emptyset$. Ou seja, existe *pelo menos um* α^* tal que $\alpha^*\boldsymbol{\iota} \succeq \boldsymbol{x}$ e $\alpha^*\boldsymbol{\iota} \preceq \boldsymbol{x}$, ou seja, $\alpha^*\boldsymbol{\iota} \sim \boldsymbol{x}$.

Unicidade: Suponha que haja dois números α^* e α^{**} tais que $\alpha^* \boldsymbol{\iota} \sim \boldsymbol{x}$ e $\alpha^{**} \boldsymbol{\iota} \sim \boldsymbol{x}$. Transitividade de $\sim$ garante que $\alpha^* \boldsymbol{\iota} \sim \alpha^{**} \boldsymbol{\iota}$. Mas por monotonicidade estrita $\alpha^* = \alpha^{**}$.

Precisamos ainda mostrar que essa função utilidade representa as preferências. Mas isso é fácil. Considere duas cestas $\boldsymbol{x}^1$ e $\boldsymbol{x}^2$ e as utilidades associadas $u\left(\boldsymbol{x}^1\right)$ e $u\left(\boldsymbol{x}^2\right)$. Então

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2 \quad & \underset{\text{definição}}{\Leftrightarrow} u\left(\boldsymbol{x}^1\right)\boldsymbol{\iota} \sim \boldsymbol{x}^1 \succeq \boldsymbol{x}^2 \sim u\left(\boldsymbol{x}^2\right)\boldsymbol{\iota} \\
& \underset{\text{transitividade}}{\Leftrightarrow} u\left(\boldsymbol{x}^1\right)\boldsymbol{\iota} \succeq u\left(\boldsymbol{x}^2\right)\boldsymbol{\iota} \\
& \underset{\text{monotonicidade}}{\Leftrightarrow} u\left(\boldsymbol{x}^1\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^2\right)
\end{aligned}
$$

Continuidade: Basta mostrar que a imagem inversa de qualquer bola aberta em $\mathbb{R}_+$ é um conjunto aberto em X.
Uma bola aberta em $\mathbb{R}_+$ é um intervalo aberto (a,b). Assim,

$$\begin{aligned}
u^{-1}((a,b)) &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+; a < u(\boldsymbol{x}) < b\right\} \\
&= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+; a\boldsymbol{\iota} \prec u(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\iota} \prec b\boldsymbol{\iota}\right\} \\
&= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+; a\boldsymbol{\iota} \prec \boldsymbol{x} \prec b\boldsymbol{\iota}\right\} \\
&= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+; a\boldsymbol{\iota} \prec \boldsymbol{x}\right\} \cap \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+; \boldsymbol{x} \prec b\boldsymbol{\iota}\right\}
\end{aligned}$$

$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+; a\boldsymbol{\iota} \prec \boldsymbol{x}\right\}$ é aberto em $\mathbb{R}^n_+$ por ser o complementar de $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+; a\boldsymbol{\iota} \succsim \boldsymbol{x}\right\}$, que é fechado por continuidade das preferências.
Raciocínio análogo vale para $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+; \boldsymbol{x} \prec b\boldsymbol{\iota}\right\}$.
Portanto $u^{-1}((a,b))$ é a interceção de dois conjuntos abertos. Logo, aberto.

- **Observação 1.** Na verdade, somente os Axiomas 1,2 e 3 são estritamente necessários (ver Debreu, 1959, cap. 4)
- **Observação 2:** Se existe pelo menos uma função utilidade que representa as preferências, existem infinitas, pois funções utilidade são invariantes em relação a tranformações monotônicas. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente,

$$f\left[u\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right] \geq f\left[u\left(\boldsymbol{x}^1\right)\right] \Leftrightarrow u\left(\boldsymbol{x}^0\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^1\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^0 \succeq \boldsymbol{x}^1$$

- **Observação 3:** Provamos que existem funções contínuas que representam $\succeq$. Porém, nem toda representação de $\succeq$ precisa ser contínua. Basta tomar $v(\cdot) = f(u(\cdot))$ onde f é monótona descontínua.