Micro: Aula 02

O Problema do Consumidor

17 de outubro de 2015

Problema do consumidor:

$$\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{B} \text{ tal que } \boldsymbol{x}^* \succeq \boldsymbol{x} \text{ para todo } \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{B}$$

Problema do consumidor:

$$\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{B} \text{ tal que } \boldsymbol{x}^* \succeq \boldsymbol{x} \text{ para todo } \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{B}$$

Pode ser convenientemente representada por:

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\boldsymbol{x}) \text{ sujeito a } y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}$$

Existência,

- $\mathbb{B} \equiv \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{+}^{\mathbf{n}} | y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \right\}$ conjunto não-vazio, fechado e limitado (portanto compacto) se $y > 0$ e $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$
- Se $u\left(\boldsymbol{x}\right)$ contínua, existe solução.

Existência,

- $\mathbb{B} \equiv \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}_{+} | y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \right\}$ conjunto não-vazio, fechado e limitado (portanto compacto) se $y > 0$ e $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$
- Se $u(\boldsymbol{x})$ contínua, existe solução.

Unicidade

- Solução, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, y)$, do problema é uma função se preferências são estritamente convexas (Axioma 5).

Supondo $u(\boldsymbol{x})$ continuamente diferenciável, estritamente quase-côncava e $\nabla u(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{x}$:

Supondo $u\left(\boldsymbol{x}\right)$ continuamente diferenciável, estritamente quase-côncava e $\nabla u(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{x}$:

1. Escreva o Lagrangeano,
$$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{x},\lambda,\mu\right) = u\left(\boldsymbol{x}\right) + \lambda\left[y - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right] + \boldsymbol{\mu x}.$$
2. Tire as condições de primeira ordem (para todo $i = 1, ..., n$),
$$\partial_{x_i}\mathcal{L} = \partial_{x_i}u\left(\boldsymbol{x}^*\right) - \lambda^* p_i + \mu_i^* = 0.$$
3. Escreva as restrições de não-negatividade,
$$\begin{aligned} y - \boldsymbol{px}^* &\geq 0 \quad \text{e} \\ x_i^* &\geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$
4. Escreva as condições de "complementary slackness",
$$\begin{aligned} \lambda^*\left[y - \boldsymbol{px}^*\right] &= 0 \quad \text{e} \\ \mu_i^* x_i^* &= 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$
5. Imponha a não-negatividade dos multiplicadores
$$\begin{aligned} \lambda^* &\geq 0 \quad \text{e} \\ \mu_i^* &\geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

- Supondo não-saciedade local, restrição $y \geq \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^*$ é ativa.
- Especializando para o caso $\boldsymbol{x}^* \gg 0$,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\lambda) = u(\boldsymbol{x}) + \lambda \left[y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \right].$$

$\boldsymbol{x}^*$ é um ponto crítico de $f(\cdot)$ ao longo de $y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$.

$\boldsymbol{x}^*$ é um ponto crítico de $f(\cdot)$ ao longo de $y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$.

Sejam $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ com $\lambda^* \neq 0$ que resolvem o sistema

$$\begin{aligned} \partial_{x^i} \mathcal{L} &= \nabla u(\boldsymbol{x}^*) - \lambda^* p_i = 0 \\ \partial_\lambda \mathcal{L} &= y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^* = 0. \end{aligned}$$

Então $\boldsymbol{x}^*$ é um ponto crítico de $f(\cdot)$ ao longo de $y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$.

$\boldsymbol{x}^*$ é um ponto crítico de $f(\cdot)$ ao longo de $y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$.

Sejam $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ com $\lambda^* \neq 0$ que resolvem o sistema

$$\partial_{x^i} \mathcal{L} = \nabla u(\boldsymbol{x}^*) - \lambda^* p_i = 0$$
$$\partial_\lambda \mathcal{L} = y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^* = 0.$$

Então $\boldsymbol{x}^*$ é um ponto crítico de $f(\cdot)$ ao longo de $y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$.
Note que $y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ já que $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda = y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$. Neste caso, $\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{x} = 0$.

$$\nabla u(\boldsymbol{x}^*) \, d\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{x} = \nabla u(\boldsymbol{x}^*) \, d\boldsymbol{x} = d\mathcal{L} = 0.$$

Ou seja, $\boldsymbol{x}^*$ é um ponto crítico de $f(\cdot)$ ao longo de $y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$.

x^* resolve o problema de maximização do consumidor

$\boldsymbol{x}^*$ resolve o problema de maximização do consumidor

Se $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) \gg 0$ resolve o sistema acima e $u(\cdot)$ é quase-côncava, então $\boldsymbol{x}^*$ resolve o problema de maximização do consumidor.

$\boldsymbol{x}^*$ resolve o problema de maximização do consumidor

Se $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) \gg 0$ resolve o sistema acima e $u(\cdot)$ é quase-côncava, então $\boldsymbol{x}^*$ resolve o problema de maximização do consumidor.

Demonstração: Suponha que $\nabla u(\boldsymbol{x}^*) = \lambda \boldsymbol{p}$, $y = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^*$, mas exista $\boldsymbol{x}^o$ tal que $u(\boldsymbol{x}^o) > u(\boldsymbol{x}^*)$ e $y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^o$. Por continuidade, existe $\alpha < 1$ e $\hat{\boldsymbol{x}} = \alpha \boldsymbol{x}^o$ tal que $u(\hat{\boldsymbol{x}}) > u(\boldsymbol{x}^*)$ e $y > \boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}$. Mas, neste caso, $\boldsymbol{p} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*) < 0 \implies \nabla u(\boldsymbol{x}^*) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) < 0$, o que não é possível se $u(\cdot)$ é quase-côncava.

Utilidade Indireta

$$v(\boldsymbol{p}, y) \equiv \begin{cases} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \end{cases} .$$

Utilidade Indireta

$$v(\boldsymbol{p}, y) \equiv \begin{cases} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \end{cases} .$$

Demanda Marshalliana

Se o problema de maximização tem solução única,

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, y) \equiv \begin{cases} \arg\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \end{cases}$$

Propriedades da Utilidade Indireta

Se $u(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $v(\boldsymbol{p}, y)$ é

Propriedades da Utilidade Indireta

Se $u(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $v(\boldsymbol{p}, y)$ é

- *Contínua em* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$

Demonstração: Teorema do máximo.

Propriedades da Utilidade Indireta

Se $u(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $v(\boldsymbol{p}, y)$ é

- *Contínua em* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$

Demonstração: Teorema do máximo.

- *Homogênea de grau zero em* (p, y)

Demonstração: Note que

$$v(\boldsymbol{p}, y) \equiv \begin{cases} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } \alpha y \geq \alpha \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \end{cases} \equiv v(\alpha \boldsymbol{p}, \alpha y)$$

- *Estritamente crescente em y*

Demonstração: Suponha que a solução do problema do consumidor é estritamente positiva e diferenciável. Solução do lagrangeano, $\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\lambda) = u(\boldsymbol{x}) + \lambda[y - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}]$, ocorre com

$$\partial_{x_i}\mathcal{L} = \nabla u(\boldsymbol{x}) - \lambda p_i = 0,$$

o que implica em $\lambda > 0$, dado que $\nabla u(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$, $\nabla u(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$.
Pelo teorema do envelope aplicado a,

$$v(\boldsymbol{p}, y) \equiv \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}(\boldsymbol{x},\lambda)$$

temos

$$\partial_y v(\boldsymbol{p}, y) = \lambda > 0.$$

- *Decrescente em* $\boldsymbol{p}$

Demonstração 1: Considere dois vetores de preços $\boldsymbol{p}^0$ e $\boldsymbol{p}^1$ tais que $\boldsymbol{p}^1 < \boldsymbol{p}^0$, e seja $\boldsymbol{x}^0$ a escolha ótima aos preços $\boldsymbol{p}^0$. Supondo $\boldsymbol{x}^0 \gg \mathbf{0}$, temos que $\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}^0 < \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0$. Ou seja, $\boldsymbol{x}^0$ é factível aos preços $\boldsymbol{p}^1$. Portanto $v(\boldsymbol{p}^1, y) \geq u\left(\boldsymbol{x}^0\right) = v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right)$.

- *Decrescente em* $\boldsymbol{p}$

Demonstração 1: Considere dois vetores de preços $\boldsymbol{p}^0$ e $\boldsymbol{p}^1$ tais que $\boldsymbol{p}^1 < \boldsymbol{p}^0$, e seja $\boldsymbol{x}^0$ a escolha ótima aos preços $\boldsymbol{p}^0$. Supondo $\boldsymbol{x}^0 \gg \mathbf{0}$, temos que $\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}^0 < \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0$. Ou seja, $\boldsymbol{x}^0$ é factível aos preços $\boldsymbol{p}^1$. Portanto $v(\boldsymbol{p}^1, y) \geq u\left(\boldsymbol{x}^0\right) = v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right)$.
Demonstração 2: Pelo teorema do envelope

$$\partial_i v(\boldsymbol{p}, y) = -\lambda x_i(\boldsymbol{p}, y) < 0.$$

- *Quase-convexa em* $(\boldsymbol{p}, y)$

Demonstração: Defina os conjuntos orçamentários $\mathbb{B}^1, \mathbb{B}^2$ e $\mathbb{B}^t$:

$$\mathbb{B}^1 \equiv \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ | \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x} \leq y^1\right\}$$
$$\mathbb{B}^2 \equiv \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ | \boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{x} \leq y^2\right\}$$
$$\mathbb{B}^t \equiv \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ | \boldsymbol{p}^t \cdot \boldsymbol{x} \leq y^t\right\},$$

onde $\boldsymbol{p}^t = t\boldsymbol{p}^1 + (1-t)\,\boldsymbol{p}^2$ e $y^t = ty^1 + (1-t)\,y^2$. Sejam $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$ e $\boldsymbol{x}^t$ as ecolhas ótimas correspondentes a cada um desses conjuntos orçamentários.
Neste caso, $\left[t\boldsymbol{p}^1 + (1-t)\,\boldsymbol{p}^2\right] \cdot \boldsymbol{x}^t \leq ty^1 + (1-t)\,y^2$. Neste caso, ou $\boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^t \leq y^1$ ou $\boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{x}^t \leq y^2$. Portanto, ou $\boldsymbol{x}^1$ ou $\boldsymbol{x}^2$ foram escolhidos quando $\boldsymbol{x}^t$ era viável. Donde $u\left(\boldsymbol{x}^1\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^t\right)$ ou $u\left(\boldsymbol{x}^2\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^t\right)$.
Donde,
$v\left(t\boldsymbol{p}^1 + (1-t)\,\boldsymbol{p}^2, ty^1 + (1-t)\,y^2\right) \leq \max\left\{v(\boldsymbol{p}^1, y^1); v(\boldsymbol{p}^2, y^2)\right\}.$

- *Identidade de Roy: se $v(p, y)$ é diferenciável no ponto (p^0, y^0) e $\partial v(p^0, y^0)/\partial y \neq 0$, então*

$$x_i\left(\boldsymbol{p}^0, y^0\right) = -\frac{\partial_i v(\boldsymbol{p}^0, y^0)}{\partial_y v(\boldsymbol{p}^0, y^0)}.$$

Demonstração: Vimos que $\partial_i v(\boldsymbol{p}, y) = -\lambda x_i(\boldsymbol{p}, y)$ e $\partial_y v(\boldsymbol{p}, y) = \lambda$. Logo,

$$\partial_i v(\boldsymbol{p}, y) = -\partial_y v(\boldsymbol{p}, y) x_i(\boldsymbol{p}, y)$$

Propriedades da Demanda Marshalliana.

Além das propriedades de adding up e homogeneidade de grau 0 em preços e renda, temos:

- *Simetria e negatividade semi-definida da matriz de Slutsky*:

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{p}, y) \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 x_1 + (\partial_y x_1)\, x_1 & \ldots & \partial_n x_1 + (\partial_y x_1)\, x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 x_n + (\partial_y x_n)\, x_1 & \ldots & \partial_n x_n + (\partial_y x_n)\, x_n \end{pmatrix}$$

Propriedades da Demanda Marshalliana.

Além das propriedades de adding up e homogeneidade de grau 0 em preços e renda, temos:

- *Simetria e negatividade semi-definida da matriz de Slutsky*:

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{p}, y) \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 x_1 + (\partial_y x_1)\, x_1 & \dots & \partial_n x_1 + (\partial_y x_1)\, x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 x_n + (\partial_y x_n)\, x_1 & \dots & \partial_n x_n + (\partial_y x_n)\, x_n \end{pmatrix}$$

Adiaremos a demonstração até havermos discutido a equação de Slutsky.

Minimização de despesas

Função Despesa

$$e(\boldsymbol{p}, u) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } u\left(\boldsymbol{x}\right) \geq u \end{array} \right. .$$

Demanda Hicksiana,

$$\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{p}, u) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \arg\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } u\left(\boldsymbol{x}\right) \geq u \end{array} \right. .$$

Propriedades da Função Despesa

Defina $U \equiv \left\{ u\left(\boldsymbol{x}\right) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \right\}$. Se $u\left(\boldsymbol{x}\right)$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $e(\boldsymbol{p}, u)$ é:

Propriedades da Função Despesa

Defina $U \equiv \left\{ u\left(\boldsymbol{x}\right) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{+}^{n} \right\}$. Se $u\left(\boldsymbol{x}\right)$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}_{+}^{n}$, temos que $e(\boldsymbol{p}, u)$ é:

- *Igual a zero quando u atinge o seu valor mínimo em U.*

Demonstração: Note que o menor valor que atinge a utilidade ocorre com $u\left(\mathbf{0}\right)$, devido à monotonicidade estrita. Mas $\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Propriedades da Função Despesa

Defina $U \equiv \left\{ u\left(\boldsymbol{x}\right) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{+}^{n} \right\}$. Se $u\left(\boldsymbol{x}\right)$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}_{+}^{n}$, temos que $e(\boldsymbol{p}, u)$ é:

- *Igual a zero quando u atinge o seu valor mínimo em U.*

Demonstração: Note que o menor valor que atinge a utilidade ocorre com $u\left(\mathbf{0}\right)$, devido à monotonicidade estrita. Mas $\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{0} = 0$.

- *Contínua em $\mathbb{R}_{++}^{n} \times U$.*

Demonstração: Continuidade decorre, mais uma vez, do teorema do máximo de Berge.

- *Para todo $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$, estritamente crescente e sem limite superior em u.*

Demonstração: Primeiro, note que a restrição orçamentária é ativa. Seja $\boldsymbol{x}^*$ a cesta que minimiza a despesa e suponha que $u\left(\boldsymbol{x}^*\right) > u$. Nesse caso, continuidade e monotonicidade estrita, garantem que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $u\left(\alpha \boldsymbol{x}^*\right) > u$. Como, $u > u\left(\mathbf{0}\right)$, $u\left(\boldsymbol{x}^*\right) > u\left(\mathbf{0}\right)$ o que implica em $\boldsymbol{x}^* \neq \mathbf{0}$. Neste caso, $\boldsymbol{p} \cdot \alpha \boldsymbol{x}^* < \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^*$. Como, $u\left(\alpha \boldsymbol{x}^*\right) > u$ então $\boldsymbol{x}^*$ não pode ser a cesta que minimiza a função objetivo. Uma contradição. Logo, $u\left(\boldsymbol{x}^*\right) = u$, se $\boldsymbol{x}^*$ resolve o problema de minimização. Neste caso, como

$$e(\boldsymbol{p}, u) \equiv \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}\left(\boldsymbol{x}, \mu\right)$$

onde $\mathcal{L}\left(\boldsymbol{x}, \mu\right) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} + \mu \left[u - u\left(\boldsymbol{x}\right)\right]$,

$$\partial_u e(\boldsymbol{p}, u) = \partial_u \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}\left(\boldsymbol{x}, \mu\right) = \mu > 0.$$

- *Não-decrescente em* $\boldsymbol{p}$

Demonstração: Considere dois vetores $\boldsymbol{p}^0$ e $\boldsymbol{p}^1$ tais que $p_j^0 \geq p_j^1$ e $p_k^0 = p_k^1 \; \forall k \neq j$. Seja, então $\boldsymbol{x}^0$ a escolha ótima aos preços $\boldsymbol{p}^0$, então, $e\left(\boldsymbol{p}^0, u\right) = \boldsymbol{p}^0 \boldsymbol{x}^0 \geq \boldsymbol{p}^1 \boldsymbol{x}^0 \geq e\left(\boldsymbol{p}^1, u\right)$.

- *Não-decrescente em $\boldsymbol{p}$*

Demonstração: Considere dois vetores $\boldsymbol{p}^0$ e $\boldsymbol{p}^1$ tais que $p_j^0 \geq p_j^1$ e $p_k^0 = p_k^1 \; \forall k \neq j$. Seja, então $\boldsymbol{x}^0$ a escolha ótima aos preços $\boldsymbol{p}^0$, então, $e\left(\boldsymbol{p}^0, u\right) = \boldsymbol{p}^0 \boldsymbol{x}^0 \geq \boldsymbol{p}^1 \boldsymbol{x}^0 \geq e\left(\boldsymbol{p}^1, u\right)$.

- *Homogênea de grau 1 em $\boldsymbol{p}$*

Demonstração: Note que

$$e(\alpha \boldsymbol{p}, u) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n} \alpha \boldsymbol{p} \boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } u\left(\boldsymbol{x}\right) \geq u \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n} \boldsymbol{p} \boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } u\left(\boldsymbol{x}\right) \geq u \end{array} \right. \equiv \alpha e(\boldsymbol{p}, u)$$

- *Côncava em* p

Demonstração: Para $\boldsymbol{p}^1$ e $\boldsymbol{p}^2$ e defina

$$\boldsymbol{x}^1 \equiv \begin{cases} \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } u(\boldsymbol{x}) \geq u \end{cases} \text{ e } \boldsymbol{x}^2 \equiv \begin{cases} \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } u(\boldsymbol{x}) \geq u \end{cases}.$$

Seja $\boldsymbol{p}^t = t\boldsymbol{p}^1 + (1-t)\,\boldsymbol{p}^2$, e

$$\boldsymbol{x}^t \equiv \begin{cases} \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{p}^t \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } u(\boldsymbol{x}) \geq u \end{cases}.$$

Então $\boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^1 \leq \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^t$ e $\boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{x}^2 \leq \boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{x}^t$. Donde,

$$t\,\underbrace{\boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^1}_{e(\boldsymbol{p}^1,u)} + (1-t)\,\underbrace{\boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{x}^2}_{e(\boldsymbol{p}^2,u)} \leq \underbrace{\boldsymbol{p}^t \cdot \boldsymbol{x}^t}_{e(\boldsymbol{p}^t,u)}.$$

- *Lema de Shephard: se* $e(p,u)$ *é diferenciável no ponto* (p^0,u^0) *e* $p^0 \gg 0$*, então*

$$\partial_i e(\boldsymbol{p}^0,u^0) = \chi_i(\boldsymbol{p}^0,u^0)$$

Demonstração: Pelo teorema do envelope,

$$\partial_i e(\boldsymbol{p},u) = \partial_i \max \mathcal{L}\left(\boldsymbol{x},\mu\right) = \chi_i(\boldsymbol{p},u).$$

Propriedades da Demanda Hicksiana

- *A curva de demanda de Hicks é não-positivamente inclinada; i.e.,*

$$0 \geq \partial_i \chi_i(\boldsymbol{p}, u)$$

Demonstração 1: Pelo lema de Shephard, $\partial_i e(\boldsymbol{p}, u) = \chi_i(\boldsymbol{p}, u)$. Diferenciando mais uma vez, tem-se

$$\partial_{ii}^2 e(\boldsymbol{p}, u) = \partial_i \chi_i(\boldsymbol{p}, u).$$

Mas $\partial_{ii}^2 e(\boldsymbol{p}, u)$ é não-positiva devido à concavidade da função gasto.

Demonstração 2: Considere duas cestas, $\boldsymbol{x}^1$ e $\boldsymbol{x}^2$ que minimizam os gastos para preços $\boldsymbol{p}^1$ e $\boldsymbol{p}^2$, respectivamente e que geram a mesma utilidade, i.e. $u\left(\boldsymbol{x}^1\right) = u\left(\boldsymbol{x}^2\right)$. Neste caso, tem-se:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^1 \leq \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^2 \\ \boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{x}^2 \leq \boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{x}^1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boldsymbol{p}^1 \cdot \left(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2\right) \leq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}^2 \cdot \left(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2\right) \geq 0 \end{array}$$

Logo,

$$\left(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^2\right) \cdot \left(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2\right) \leq 0$$

Ou, $d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{p} \leq 0$.

- *A matriz de substituição (de Hicks) é negativa semi-definida.*

Demonstração: $\sigma(\boldsymbol{p}, u)$ é igual à Hessiana da função gasto. Por definição, $\sigma(\boldsymbol{p}, u) \equiv$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \chi_1(\boldsymbol{p}, u) & \dots & \partial_n \chi_1(\boldsymbol{p}, u) \\ \dots & \ddots & \dots. \\ \partial_1 \chi_n(\boldsymbol{p}, u) & \dots & \partial_n \chi_n(\boldsymbol{p}, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2_{11} e(\boldsymbol{p}, u) & \dots & \partial^2_{1n} e(\boldsymbol{p}, u) \\ \dots & \ddots & \dots. \\ \partial^2_{n1} e(\boldsymbol{p}, u) & \dots & \partial^2_{nn} e(\boldsymbol{p}, u) \end{pmatrix}.$$

Simetria: $\sigma(p,u)$ *é simétrica, i.e.,*

$$\partial_j \chi_i(\boldsymbol{p},u) = \partial_i \chi_j(\boldsymbol{p},u)$$

Demonstração: Pelo lema de Shephard,

$$\partial_j \chi_i(\boldsymbol{p},u) = \partial^2_{ij} e(\boldsymbol{p},u) = \partial^2_{ji} e(\boldsymbol{p},u) = \partial_i \chi_j(\boldsymbol{p},u),$$

onde a segunda igualdade é devida ao teorema de Young.

Simetria: $\sigma(p, u)$ *é simétrica, i.e.,*

$$\partial_j \chi_i(\boldsymbol{p}, u) = \partial_i \chi_j(\boldsymbol{p}, u)$$

Demonstração: Pelo lema de Shephard,

$$\partial_j \chi_i(\boldsymbol{p}, u) = \partial^2_{ij} e(\boldsymbol{p}, u) = \partial^2_{ji} e(\boldsymbol{p}, u) = \partial_i \chi_j(\boldsymbol{p}, u),$$

onde a segunda igualdade é devida ao teorema de Young.
Homogeneidade: Para todo $(\boldsymbol{p}, u)$ *e todo* $t > 0$,

$$\chi_i(t\boldsymbol{p}, u) = \chi_i(\boldsymbol{p}, u)$$

Demonstração: Trivial.

Problemas Duais

$$\text{problema A} \qquad\qquad\qquad \text{problema B}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\boldsymbol{x}) \\ \text{sujeito à } y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito à } u(\boldsymbol{x}) \geq u \end{array} \right.$$

Problemas Duais

$$\text{problema A} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{problema B}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\boldsymbol{x}) \\ \text{sujeito à } y \geq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito à } u(\boldsymbol{x}) \geq u \end{array} \right.$$

Se $u(\boldsymbol{x})$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, $\boldsymbol{p} \gg 0$, $y > 0$, $u \in U$, então

$$e(\boldsymbol{p}, v(\boldsymbol{p}, y)) = y, \text{ e}$$
$$v(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u)) = u.$$

Além disso, se $u\,(\boldsymbol{x})$ é contínua, estritamente crescente e estritamente quase-côncava em $\mathbb{R}^n_+$, então para $\boldsymbol{p} \gg 0$, $y > 0$, $u \in U$,

$$x_i(\boldsymbol{p}, y) = \chi^i(\boldsymbol{p}, v(\boldsymbol{p}, y)) \ \forall i$$
$$\chi^i(\boldsymbol{p}, u) = x_i(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u)) \ \forall i.$$

Equação de Slutsky

$$\underbrace{\partial_j x_i(\boldsymbol{p}, y)}_{\text{efeito-preço}} = \underbrace{\partial_j \chi^i(\boldsymbol{p}, u^*)}_{\text{efeito-substituição}} - \underbrace{\partial_y x_i(\boldsymbol{p}, y) x_j(\boldsymbol{p}, y)}_{\text{efeito-renda}}$$

Demonstração: Vimos que

$$\chi^i(\boldsymbol{p}, u) \equiv x_i(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u))$$

Como identidade, podemos diferenciar com relação a p_j,

$$\begin{aligned}\partial_j \chi^i(\boldsymbol{p}, u) &= \partial_j x_i(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u)) + \partial_y x_i(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u)) \partial_j e(\boldsymbol{p}, u) \\ &= \partial_j x_i(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u)) + \partial_y x_i(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u)) x_j(\boldsymbol{p}, y),\end{aligned}$$

onde a última igualdade é conseqüência do lema de Shephard.

Demonstração da última propriedade da demanda marshalliana:
É suficiente notar que $\mathrm{s}(\boldsymbol{p}, y) = \sigma(\boldsymbol{p}, u)$, ou seja a matriz cujas entradas são dadas por $\partial x_i / \partial p_j + (\partial x_i / \partial y)\, x_j$ é a matriz jacobiana das demandas compensadas que é simétrica e negativa semi-definida por ser igual à matriz hessiana da função despesa.

Equação de Slutsky usando Elasticidades

$$\partial_j x_i(\boldsymbol{p}, y) = \partial_j \chi^i(\boldsymbol{p}, u^*) - x_j(\boldsymbol{p}, y)\partial_y x_i(\boldsymbol{p}, y),$$

o que implica em

$$\underbrace{\partial_j x_i(\boldsymbol{p}, y)\frac{p_j}{x_i}}_{\varepsilon_{ij}} = \underbrace{\partial_j \chi^i(\boldsymbol{p}, u^*)\frac{p_j}{x_i}}_{\hat{\varepsilon}_{ij}} - \underbrace{\partial_y x_i(\boldsymbol{p}, y)\frac{y}{x_i}}_{\eta_i}\underbrace{\frac{x_j(\boldsymbol{p}, y)p_j}{y}}_{w_j}$$

$$\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} - \eta_i w_j$$

Medidas de Variação de Bem-estar

A variação da utilidade quando os preços passam de $\boldsymbol{p}^0$ para $\boldsymbol{p}^1$ é

$$v\left(\boldsymbol{p}^1, y\right) - v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right).$$

Medidas de Variação de Bem-estar

A variação da utilidade quando os preços passam de $\boldsymbol{p}^0$ para $\boldsymbol{p}^1$ é

$$v\left(\boldsymbol{p}^1, y\right) - v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right).$$

Caso 1: Somente um preço variou; o preço do bem i, p_i.

$$v\left(\boldsymbol{p}^1, y\right) - v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right) = \int_{\boldsymbol{p}^0}^{\boldsymbol{p}^1} \partial_i v\left(\boldsymbol{p}, y\right) dp_i.$$

$$v\left(\boldsymbol{p}^1, y\right) - v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right) = -\int_{\boldsymbol{p}^0}^{\boldsymbol{p}^1} \partial_y v\left(\boldsymbol{p}, y\right) x_i\left(\boldsymbol{p}, y\right) dp_i$$

Suponhamos, $\partial v\left(\boldsymbol{p}, y\right)/\partial y$ constante. Neste caso,

$$-\frac{1}{\partial_y v\left(\boldsymbol{p}, y\right)} \int_{\boldsymbol{p}^0}^{\boldsymbol{p}^1} \partial_i v\left(\boldsymbol{p}, y\right) dp_i = \int_{\boldsymbol{p}^0}^{\boldsymbol{p}^1} x_i\left(\boldsymbol{p}, y\right) dp_i$$

Ou seja, a variação no bem estar é proporcional à variação na área abaixo da curva de demanda: *excedente do consumidor.*

A *variação compensatória* CV dessa mudança de preço é definida por

$$v\left(\boldsymbol{p}^1, y + CV\right) = v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right)$$

Podemos expressar CV também através das funções gasto:

$$e\left(\boldsymbol{p}^1, v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right)\right) = e\left(\boldsymbol{p}^1, v\left(\boldsymbol{p}^1, y + CV\right)\right) \Longrightarrow CV = e\left(\boldsymbol{p}^1, v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right)\right) - y$$

Também é verdade que $y = e\left(\boldsymbol{p}^0, v\left(\boldsymbol{p}^0, y\right)\right)$, portanto temos que

$$CV = e\left(\boldsymbol{p}^1, v^0\right) - e\left(\boldsymbol{p}^0, v^0\right)$$

Pelo lema de Shephard,

$$\begin{aligned} CV &= e\left(\boldsymbol{p}^1, v^0\right) - e\left(\boldsymbol{p}^0, v^0\right) \\ &= \int_{\boldsymbol{p}^0}^{\boldsymbol{p}^1} \partial_{\boldsymbol{p}} e\left(\boldsymbol{p}, v^0\right) \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt = \int_{\boldsymbol{p}^0}^{\boldsymbol{p}^1} \boldsymbol{\chi}\left(\boldsymbol{p}, v^0\right) \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt \end{aligned}$$

CV é igual à integral de linha debaixo da demanda hicksiana entre $\boldsymbol{p}^0$ e $\boldsymbol{p}^1$.

A *variação equivalente* , EV é

$$v\left(\boldsymbol{p}^{1}, y\right)=v\left(\boldsymbol{p}^{0}, y-EV\right)$$

Ou seja,

$$e\left(\boldsymbol{p}^{0}, v\left(\boldsymbol{p}^{1}, y\right)\right)=e\left(\boldsymbol{p}^{0}, v\left(\boldsymbol{p}^{0}, y-EV\right)\right) \Longrightarrow EV=y-e\left(\boldsymbol{p}^{0}, v\left(\boldsymbol{p}^{1}, y\right)\right)$$

Analogamente à variação compensatória, sendo $v^{1} \equiv v\left(\boldsymbol{p}^{1}, y\right)$, temos

$$EV=e\left(\boldsymbol{p}^{1}, v^{1}\right)-e\left(\boldsymbol{p}^{0}, v^{1}\right).$$

Em função das demandas hicksianas,

$$
\begin{aligned}
EV &= e\left(\boldsymbol{p}^{1}, v^{1}\right) - e\left(\boldsymbol{p}^{0}, v^{1}\right) \\
&= \int_{\boldsymbol{p}^{0}}^{\boldsymbol{p}^{1}} \partial_{\boldsymbol{p}} e\left(\boldsymbol{p}, v^{1}\right) \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt = \int_{\boldsymbol{p}^{0}}^{\boldsymbol{p}^{1}} \boldsymbol{\chi}\left(\boldsymbol{p}, v^{1}\right) \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt
\end{aligned}
$$

EV é igual à integral de linha em baixo da demanda hicksiana entre $\boldsymbol{p}^0$ e $\boldsymbol{p}^1$.