FGV MFEE
P1 - Competição Estratégica - 2016
Professora: *Érica Diniz*
Monitor: *Pedro Solti*
5 questões – 100 pontos – 3h de duração

Questão 1 (x pontos)

Diga se cada um dos itens abaixo é verdadeiro ou falso e justifique:

a) Em concorrência perfeita, as utilidades marginais dos compradores se igualam aos custos marginais da firma em equilíbrio.

   Sol.: Verdadeiro. Ambos são iguais ao preço.

b) O modelo de competição de Bertrand é melhor para explicar situações em que há limite de capacidade do que modelos de Cournot.

   Sol.: Falso. É o contrário. Modelos de Bertrand partem do pressuposto de que não há limite de capacidade.

c) O índice de Lerner é diretamente proporcional à elasticidade preço-demanda do mercado.

   Sol.: Falso. Ele é inversamente proporcional.

d) Em modelos de concorrência monopolística com livre entrada e saída de firmas, em equilíbrio as firmas igualam preço ao custo médio.

   Sol.: Verdadeiro. Nesses modelos, em equilíbrio o lucro deverá ser zero, que é o mesmo que dizer que preço é igual ao custo marginal.

e) Ao fazer discriminação de preços de segundo grau, uma firma sempre consegue extrair todo o excedente dos consumidores. Isso não é necessariamente verdade ao fazer discriminação de primeiro grau.

   Sol.: Falso. É o contrário.

Questão 2 (x pontos)

Um contínuo de consumidores, de medida 1, estão uniformemente distribuídos ao longo de uma rua que tem 1 km de comprimento, cada um no endereço $x \in [0, 1]$ (como no modelo da cidade linear). Em cada ponta da rua há um botequim e ambos vendem a mesma cerveja. Cada consumidor adquire no máximo uma cerveja. A rua na verdade é uma ladeira e os consumidores pagam uma utilidade maior para subir do que descer o morro para beber (ninguém está preocupado com a volta). A utilidade de um consumidor localizado em $x \in [0, 1]$ é:

$v - p_b - t_b x$ se comprar no botequim de Baixo

$v - p_a - t_a(1 - x)$ se comprar no botequim do Alto.

0 ; se não comprar,

onde $t_A > t_B$. Suponha que v seja grande o suficiente para garantir que todos os consumidores da rua decidam comprar uma cerveja. Suponha também que o custo da cerveja para os botequins seja normalizado em zero. Finalmente suponha que $t_b < 4t_A$ (para que haja demanda em ambos botequins no equilíbrio).

a) Determine a demanda de cada botequim em função de p_A e p_B.

Sol.: Seja $\bar{x}$ o consumidor que fica indiferente entre comprar de ambos os botequins. Nesse caso, ele é definido pela seguinte equação:

$$v - p_b - t_b\bar{x} = v - p_a - t_a(1 - \bar{x})$$

Reorganizando essa expressão, temos:

$$\bar{x} = \frac{p_a - p_b + t_a}{t_a + t_b}$$

E sabemos que a demanda do botequim baixo será $\bar{x}$ e do botequim alto, $1 - \bar{x}$. Logo, o problema de maximização do botequim baixo é:

$$\max_{p_b} \frac{p_a - p_b + t_a}{t_a + t_b} p_b$$

Derivando e igualando a zero, obtemos a seguinte CPO:

$$p_a - 2p_b + t_a = 0 \Rightarrow p_b = \frac{p_a + t_a}{2}$$

Já o problema de maximização do botequim alto é:

$$\max_{p_a} \left(1 - \frac{p_a - p_b + t_a}{t_a + t_b}\right) p_a = \max_{p_a} \frac{p_b - p_a + t_b}{t_a + t_b} p_a$$

Que dá a CPO:

$$p_b - 2p_a + t_b = 0 \Rightarrow p_a = \frac{p_b + t_b}{2} = \frac{p_a + t_a + 2t_b}{4} \Rightarrow p_a = \frac{t_a + 2t_b}{3} \Rightarrow p_b = \frac{t_b + 2t_a}{3}$$

Assim sendo,

$$\bar{x} = \frac{\frac{t_b - t_a}{3} + t_a}{t_a + t_b} = \frac{2t_a + t_b}{3(t_a + t_b)}$$

Então o botequim baixo atrai $\frac{2t_a + t_b}{3(t_a + t_b)}$ pessoas, e o botequim alto, $\frac{2t_b + t_a}{3(t_a + t_b)}$

b) Determine os preços escolhidos pelos botequins e os seus lucros em equilíbrio de Nash.

Sol.: Como visto no item anterior,

$$p_a = \frac{t_a + 2t_b}{3} \qquad \text{e} \qquad p_b = \frac{t_b + 2t_a}{3}$$

O lucro do botequim baixo é:

$$\pi_b = p_b \bar{x} = \frac{(2t_a + t_b)^2}{9(t_a + t_b)}$$

e o do alto é:

$$\pi_a = p_a(1 - \bar{x}) = \frac{(t_a + 2t_b)^2}{9(t_a + t_b)}$$

c) Qual botequim é mais careiro no Equilíbrio de Nash? Qual botequim atrai maior clientela?

   Sol.: Como $t_a > t_b$, temos que: $\frac{2t_a+t_b}{3(t_a+t_b)} > \frac{t_a+2t_b}{3(t_a+t_b)}$. Logo, o botequim baixo atrai uma clientela maior.

Questão 3 (x pontos)
Suponha que haja um monopolista que venda um bem para dois possiveis tipos de consumidores, chamados de consumidores A e consumidores B. Existem iguais quantidades de consumidores A e B nessa economia. A utilidade do consumidor é dada por:

$$U_i(q, T) = \theta_i \sqrt{q} - T,$$

em que T é o total pago, q é a quantidade comprada, $\theta_A = 1$ e $\theta_B = 1,2$.

Por fim, suponha que o monopolista cobre uma tarifa bipartite: $T(q) = R + Pq$, e tem um custo marginal $c = 1$.

a) Encontre a demanda e o excedente do consumidor para cada um dos tipos.

   Sol.: O consumidor do tipo i resolve:

$$\max_{q_i} \theta_i \sqrt{q_i} - A - Pq_i$$

   Isso nos rende como CPO:

$$\frac{\theta_i}{2\sqrt{q_i}} - P = 0 \Rightarrow q_i = \left(\frac{\theta_i}{2p}\right)^2$$

   Logo, o excedente do consumidor é dado por:

$$\int_p^\infty \left(\frac{\theta_i}{2p}\right)^2 dp = \frac{\theta_i^2}{4p}$$

b) Suponha que a firma consiga idenfiticar qual é o tipo de cada consumidor. Quais serão as tarifas cobradas, as quantidades consumidas e o lucro do monopolista em Equilíbrio de Nash?

   Sol.: Nesse caso, o monopolista conseguirá trabalhar em dois mercados completamente separados. Ele irá definir o preço a fazer o consumidor ficar indiferente entre consumir e não consumir, isso é:

$$\theta_i\sqrt{q_i} - T_i = 0 \Rightarrow T_i = \theta_i\sqrt{q_i}$$

E seu problema será:

$$\max_{q_i} \theta_i\sqrt{q_i} - q_i$$

Derivando e igualando a zero, obtemos:

$$\frac{\theta_i}{2\sqrt{q_i}} - 1 = 0 \Rightarrow q_i = \left(\frac{\theta_i}{2}\right)^2 \Rightarrow T_i = \frac{\theta_i^2}{2}$$

O lucro do monopolista será:

$$\sum_i \frac{\theta_i^2}{4} = \frac{2,44}{4} = 0,61$$

c) Suponha agora que a firma não consiga identificar o tipo de cada consumidor. Quais serão as tarifas cobradas, as quantidades consumidas e o lucro do monopolista em Equilíbrio de Nash? Em qual caso a firma está melhor? E cada tipo de consumidor? Dê uma intuição para as suas respostas.

Sol.:

Nesse caso, o problema é:

$$\max_{(q_1,T_1),(q_2,T_2)} (T_1 - q_1) + (T_2 - q_2)$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a.:} & \theta_1\sqrt{q_1} - T_1 \geq 0 & \text{RP1} \\ & \theta_2\sqrt{q_2} - T_2 \geq 0 & \text{RP2} \\ & \theta_1\sqrt{q_1} - T_1 \geq \theta_1\sqrt{q_2} - T_2 & \text{RI1} \\ & \theta_2\sqrt{q_2} - T_2 \geq \theta_2\sqrt{q_1} - T_1 & \text{RI2} \end{array}$$

Mas sabemos que :

$$\theta_2\sqrt{q_2} - T_2 \geq \theta_2\sqrt{q_1} - T_1 > \theta_1\sqrt{q_1} - T_1 \geq 0 \Rightarrow \text{Logo, RP2 é redundante.}$$

Ignoraremos por enquanto RI1 e depois a testaremos. Resolvendo RP1 e RI2 com igualdade, temos:

$$T_1 = \theta_1\sqrt{q_1}$$

$$T_2 = \theta_2\sqrt{q_2} - \theta_2\sqrt{q_1} + T_1 = \theta_2\sqrt{q_2} - \theta_2\sqrt{q_1} + \theta_1\sqrt{q_1}$$

Logo, o problema do monopolista é maximizar:

$$\theta_1\sqrt{q_1} + \theta_2\sqrt{q_2} - \theta_2\sqrt{q_1} + \theta_1\sqrt{q_1} - q_1 - q_2$$

Tomando as CPOs:

[q₁]: $\frac{2\theta_1-\theta_2}{2\sqrt{q_1}} - 1 = 0 \Rightarrow q_1 = 0,16 \Rightarrow T_1 = 0,4$

[q₂]: $\frac{\theta_2}{2\sqrt{q_2}} - 1 = 0 \Rightarrow q_2 = 0,36 \Rightarrow T_2 = 0,64$

Logo, o lucro é: $0,4+0,64-0,16-0,36 = 0,52$, e, portanto, é menor que no item anterior. O tipo 1 tem a mesma utilidade que antes (0), mas o tipo 2 tem utilidade estritamente positiva. O monopolista está pior porque tem menos informação para usar, enquanto o tipo 2 está melhor por ter a possibilidade de se passar do tipo 1, o que lhe gera rendas informacionais.

Questão 4 (x pontos)
Suponha que haja três firmas (chamadas X, Y e Z) competindo num mercado de um bem homogêneo. A função demanda inversa do mercado é dada por $p = 20 - Q$, em que $Q = q_X + q_Y + q_Z$. A firma X possui um custo marginal $c_X = 0.5$, a firma Y possui um custo marginal $c_Y = 1$ e a firma Z possui um custo marginal $c_Z = 2$.

a) Suponha agora que as firmas compitam à la Cournot. Encontre o Equilíbrio de Nash.

Sol.: Cada firma i resolve o seguinte problema de maximização:

$$\max_{q_i}(20 - q_i - Q_{-i})q_i - c_i q_i$$

O que rende as seguintes CPOs:

$$q_X = \frac{20 - q_Y - q_Z - 0.5}{2}$$
$$q_Y = \frac{20 - q_X - q_Z - 1}{2}$$
$$q_Z = \frac{20 - q_X - q_Y - 2}{2}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $q_X = \frac{43}{8}$, $q_Y = \frac{39}{8}$, $q_Z = \frac{31}{8}$. Logo, o preço é $p = \frac{47}{8}$.

b) Suponha agora que as fimas competem sequencialmente em quantidade, de modo que a primeira firma a tomar decisões é a firma X, seguida pela firma Y, e por fim pela firma Z. Encontre o Equilíbrio de Nash.

Sol.: Resolvemos o problema usando indução retroativa. Logo, primeiro analisamos a firma Z. Seu problema é:

$$\max(20 - q_X - q_Y - q_Z)q_Z - 2q_Z$$

A CPO é: $20 - q_X - q_Y - 2 - 2q_Z = 0 \Rightarrow q_Z = 9 - \frac{q_X+q_Y}{2}$.

Olhemos agora para o problema da firma Y. Ela maximiza:

$$\max_{q_Y}(20 - q_X - q_Y - q_Z)q_Y - q_Y = \left(20 - q_X - q_Y - 9 + \frac{q_X + q_Y}{2} - 1\right)q_Y$$

Derivando, obtemos: $10 - \frac{q_X}{2} - 2\frac{q_Y}{2} = 0 \Rightarrow q_Y = 10 - \frac{q_X}{2}$.

Por fim, resolvemos a maximização de X:

$$\max_{q_X}(20 - q_X - q_Y - q_Z)q_X - 0.5q_X = \left(20 - q_X - 10 + \frac{q_X}{2} - 9 + \frac{q_X}{2} + 5 - \frac{q_X}{4} - 0.5\right)q_X$$

$$\max_{q_X}\left(5.5 - \frac{q_X}{4}\right)q_X$$

A CPO é: $5.5 - \frac{q_X}{2} = 0 \Rightarrow q_X = 11 \Rightarrow q_Y = 4.5 \Rightarrow q_Z = 1,75$.

c) Suponha agora que nesse mercado existem apenas as firmas Y e Z, e que elas compitam à la Cournot. Encontre as quantidades de equilíbrio e o market-share de cada uma das duas firmas.

Sol.: O problema de cada firma é:

$$\max_{q_i}(20 - q_i - q_{-i})q_i - c_i q_i$$

O que rende as CPOs:

$$q_Y = \frac{20 - q_Z - 1}{2}$$
$$q_Z = \frac{20 - q_Y - 2}{2}$$

Resolvendo o sistema, $q_Y = \frac{20}{3}$, $q_Z = \frac{17}{3}$.

d) Suponha agora que as firmas tenham custos marginais iguais a 1 e descontem o tempo a uma taxa $\delta \in (0, 1)$ a cada período. Suponha ainda que elas entrem em conluio, de modo que ambas fiquem com o mesmo lucro. Para quais δs esse conluio é viável?

Sol.: Primeiro, temos que resolver o problema de competição:

$$\max_{q_i}(20 - q_i - q_{-i})q_i - 1q_i$$

O que rende a CPO:

$$20 - 2q_i - q_{-i} - 1 = 0 \Rightarrow \text{Por simetria:} 19 - 3q = 0 \Rightarrow q = \frac{19}{3}$$

Logo, o preço é $20 - 2\frac{19}{3} = \frac{22}{3}$ e o lucro de duopólio, $\pi^d = \frac{361}{9}$

Vamos agora ver qual é a quantidade de monopólio:

$$\max_q (20-q)q - q$$

[CPO:] $20 - 2q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{19}{2} \Rightarrow p = \frac{21}{2} \Rightarrow \pi^M = \frac{361}{4}$.

Logo, o lucro de conluio é $\pi^c = \frac{\pi^M}{2} = \frac{361}{8}$.

Além disso, se o oponente estiver cooperando e você resolver traí-lo, você irá produzir $q_i = \frac{19-q_{-i}}{2} = \frac{19-\frac{19}{4}}{2} = \frac{57}{8}$. A quantidade total será $\frac{3\times19}{8} + \frac{19}{2} = \frac{7\times19}{8} = \frac{137}{8}$, o preço será $20 - \frac{137}{8} = \frac{33}{8}$, e o seu lucro, $\pi^T = \left(\frac{33}{8} - 1\right)\frac{137}{8} = \frac{25\times137}{64}$.

Logo, para que conluio seja possivel, precisamos que a seguinte desigualdade valha:

$$\frac{\pi^c}{1-\delta} \geq \pi^t + \frac{\delta}{1-\delta}\pi^d \Rightarrow \delta \geq \frac{\pi^t - \pi^c}{\pi^t - \pi^d} \approx 0,822$$

Questão 5 (x pontos)
Um monopolista vê uma função demanda $q = p^{\frac{-21}{10}}$ e tem custos médios constantes e iguais a $CMed = 4$.

a) Encontre a elasticidade da demanda e mostre que ela é sempre elástica.

Sol.: A elasticidade da demanda é dada por $\frac{\partial q}{\partial p}\frac{p}{q} = \frac{-21}{10}p^{\frac{-31}{10}}\frac{p}{p^{\frac{-21}{10}}} = \frac{-21}{10} < -1$. Logo, é sempre elástica

b) Encontre o preço que o monopolista cobra em equilíbrio.

Sol. A função custo é $C(q) = 4q$. Logo, o custo marginal é constante e igual a 4. Portanto, no ótimo:

$$p\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon|}\right) = c \Rightarrow p = \frac{4}{1 - \frac{1}{\frac{21}{10}}} = \frac{84}{11}$$

c) O governo cobra um imposto $t > 0$ para cada unidade do bem. Encontre o novo preço de monopólio. A diferença no preço de equilíbrio é menor, maior ou igual ao imposto recolhido?

Sol.: Nesse caso, o problema do monopolista é:

$$\max_q (q^{\frac{-10}{21}} - t)q - 4q$$

[CPO:] $\frac{11}{21}q^{\frac{-10}{21}} - t - 4 = 0 \Rightarrow q = \left((4+t)\frac{21}{11}\right)^{\frac{-21}{10}} \Rightarrow p = \frac{84}{11} + \frac{21}{11}t$. Logo, o preço aumentará mais que o imposto.