(1) $\max_{x,y} \quad 3\ln x + 2\ln y$

$$\text{s.a.} \quad p_x x + p_y y = w$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right] \text{ posso desprezar, nesse caso}$$

$$\mathcal{L} = 3\ln x + 2\ln y + \lambda\,(w - p_x x - p_y y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{x} - p_x\lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{2}{y} - p_y\lambda = 0 \end{array}\right] \qquad \frac{3}{p_x x} = \frac{2}{p_y y}$$

$$y = \frac{2}{3}\frac{p_x}{p_y}x$$

$$p_x x + p_y y = w$$

$$p_x x + \cancel{p_y} \cdot \frac{2}{3}\frac{p_x}{\cancel{p_y}} x = w$$

$$\frac{5}{3} p_x x = w$$

$$x = \frac{3w}{5p_x} \qquad y = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{p_x}}{p_y} \cdot \frac{\cancel{3}w}{5\cancel{p_x}} = \frac{2w}{5p_y}$$

(a) $p_x = 10$ $\qquad x = \dfrac{3 \cdot 40}{5 \cdot 10} = \dfrac{12}{5}$

$p_y = 5$

$w = 40$ $\qquad y = \dfrac{2 \cdot 40}{5 \cdot 5} = \dfrac{16}{5}$

(b) $p_x = 10$ $\qquad x = \dfrac{3 \cdot 32}{5 \cdot 10} = \dfrac{48}{25}$

$p_y = 5$

$w' = 0.8 \cdot 40 = 32$ $\qquad y = \dfrac{2 \cdot 32}{5 \cdot 5} = \dfrac{64}{25}$

(2) Da questão anterior não é difícil ver que:

$$X = \frac{w}{2p_x}$$

Certifique-se que entendeu pq!

$$Y = \frac{w}{2p_y}$$

(a) $p_x = 1$ $\quad X = \frac{20}{2 \cdot 1} = 10$

$p_y = 1$

$w = 20$ $\quad Y = 10$

(b) $p_x = 1$ $\quad X = 10$

$p_y = 2$ $\quad Y = \frac{20}{2 \cdot 2} = 5$

$w = 20$

(c) $p_x = 1$ $\quad X = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$

$p_y = 2$

$w = 20 + 20(\sqrt{2} - 1)$ $\quad Y = \frac{20\sqrt{2}}{4} = 5\sqrt{2}$

$$U(X,Y) = 2\left(10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}\right)^3 + 1 = 2000001,$$

a mesma utilidade da cesta $X = 10, Y = 10$.

③ $\max_{x,y} \; e^x + y$ $\quad TMS = -\frac{1}{e^x}$

$s.a. \quad p_x x + p_y y = w$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Note que $\lim_{x \to 0} TMS = -1$

$\lim_{y \to \infty} TMS = -\frac{1}{e^x}$

sempre será solução de canto!

$$\mathcal{L} = e^x + y + \lambda(w - p_x x - p_y y) + \phi_x x + \phi_y y$$

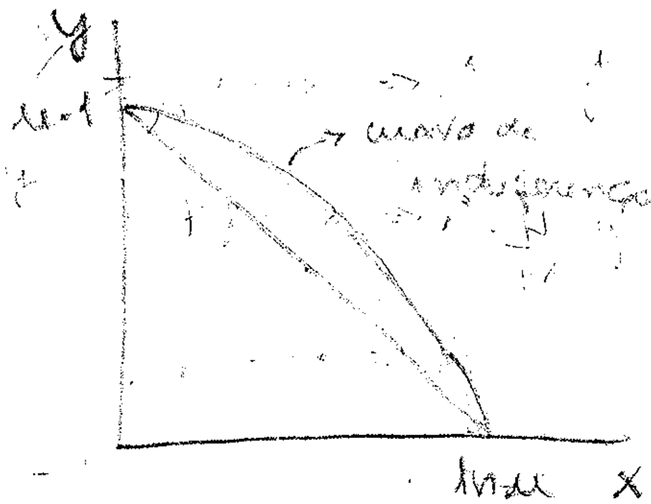
$e^x - \lambda p_x + \phi_x = 0 \quad (1)$

$1 - \lambda p_y + \phi_y = 0 \quad (2)$

$p_x x + p_y y = w \quad (3)$

$\phi_x x = 0 \quad \phi_x \geq 0 \quad (4)$

$\phi_y y = 0 \quad \phi_y \geq 0 \quad (5)$



Note que existe uma razão de preços que faz com que ambas as soluções de canto sejam indiferentes:

$y = 0 \quad x = \frac{w}{p_x} \quad u = e^{\frac{w}{p_x}}$

$y = \frac{w}{p_y} \quad x = 0 \quad u' = 1 + \frac{w}{p_y}$

$u = u' \Rightarrow e^{\frac{w}{p_x}} = 1 + \frac{w}{p_y}$

$p_y = \frac{w}{e^{\frac{w}{p_x}} - 1}$

Então:

- $p_y > \frac{w}{e^{\frac{w}{p_x}} - 1} \Rightarrow x^* = \frac{w}{p_x} \quad y^* = 0$

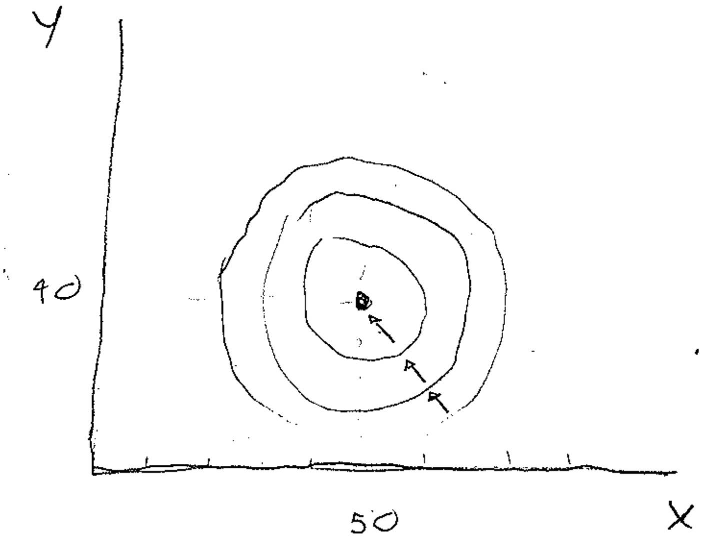
- $p_y < \frac{w}{e^{\frac{w}{p_x}} - 1} \Rightarrow x^* = 0 \quad y^* = \frac{w}{p_y}$

(4) (a) Note que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2(x-50) \begin{cases} >0 & x<50 \\ <0 & x>50 \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2(y-40) \begin{cases} >0 & y<40 \\ <0 & y>40 \end{cases}$$

Dito de outro modo, a utilidade atinge o seu máximo na cesta (50,40).

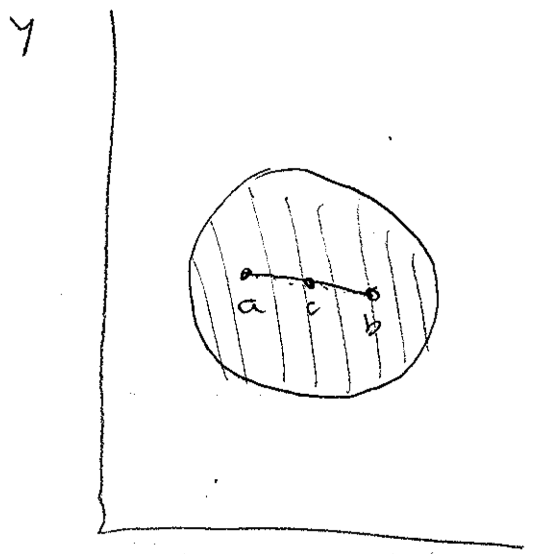


Logo fica claro que as preferências não obedecem NSL.

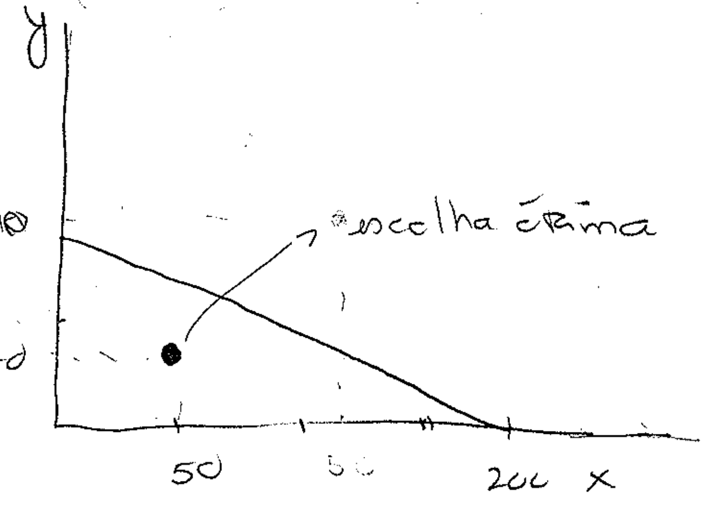
Como MF $\rightarrow$ M $\rightarrow$ NSL

não NSL $\rightarrow$ não M $\rightarrow$ não MF

Com relação à convexidade tome-se o conjunto de cestas preferidas (região hachurada). Tome-se as cestas a e b. Qualquer combinação convexa c ainda está no conjunto. Logo as preferências são convexas.



(b)



(5) (a) $\max_{x_1, x_2} \; a x_1 + x_2$ $\quad TMS = -a$

s.a. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Note que $\lim_{x_1 \to \infty} TMS = \lim_{x_2 \to \infty} TMS = 1$. Não é possível desprezar as soluções de canto!

$$\mathcal{L} = a x_1 + x_2 + \lambda (w - p_1 x_1 - p_2 x_2) + \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} a - \lambda p_1 + \phi_1 = 0 \\ 1 - \lambda p_2 + \phi_2 = 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} a - \lambda p_1 + \phi_1 = 1 - \lambda p_2 + \phi_2 \\ \lambda (p_2 - p_1) = 1 - a + \phi_2 - \phi_1 \end{array}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$$

$$\left.\begin{array}{ll} \phi_1 x_1 = 0 & \phi_1 \geq 0 \\ \phi_2 x_2 = 0 & \phi_2 \geq 0 \end{array}\right]$$ ϕ_1 e ϕ_2 não podem ser positivos ao mesmo tempo!

- $\phi_1 > 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \dfrac{w}{p_2} \quad \phi_2 = 0 \quad \phi_1 = \dfrac{p_1}{p_2} - a$

Note que $\phi_1 > 0$ se $p_1 > a p_2$

$\phi_1 = 0$ se $p_1 = a p_2$

- [illegible]

Então $x_2^* = \dfrac{w}{p_2} \quad x_1^* = 0$ se $p_1 > a p_2$

$x_2^* = 0 \quad x_1^* = \dfrac{w}{p_1}$ se $p_1 < a p_2$

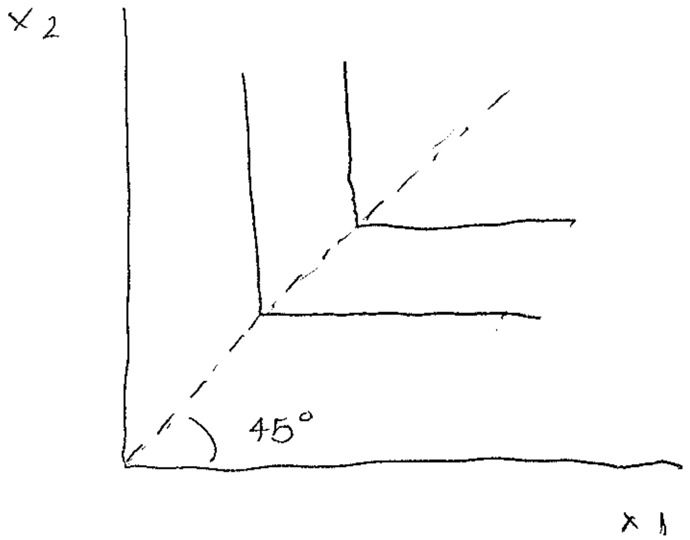
$x_1^*, x_2^* \in \{x_1, x_2 \text{ tal que } p_1 x_1 + p_2 x_2 = w\}$

se $p_1 = a p_2$

(b) $\underset{x_1, x_2}{\text{Max}} \quad \min\{x_1, x_2\}$

$$\text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

A função utilidade não é diferenciável!



A escolha ótima será sempre tal que $x_1 = x_2$.

Então, da RO:

$$p_1 x_1 + p_2 x_1 = w$$

$$x_1^* = \frac{w}{p_1 + p_2} \qquad x_2^* = \frac{w}{p_1 + p_2}$$

(c) $\underset{x_1, x_2}{\text{Max}} \quad x_1^{a} x_2^{b}$

$$\text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Ver solução no resumo "PMU (corrigido)", no site da matéria!

(d) $\underset{x_1, x_2}{\text{Max}} \quad x_1 + \ln x_2$

s.a. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Ver solução no resumo "PMU (corrigido)" no site da matéria!

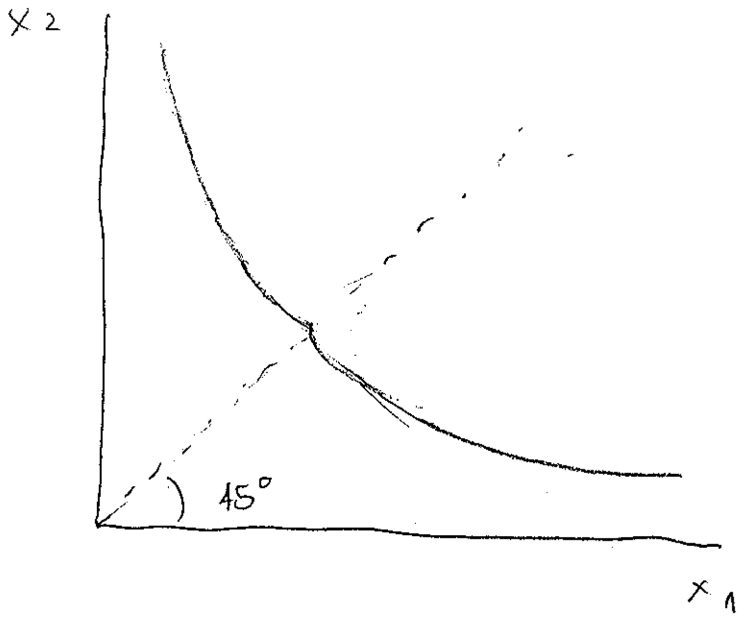
(e) $\underset{x_1, x_2}{\text{Max}} \quad \max\{x_1^2 x_2, x_1 x_2^2\}$

s.a $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

A função utilidade não é diferenciável!



Não precisa encontrar a solução [muito complicado!]

Tente por curiosidade!

- $p_2 > p_1 \Rightarrow x_1^* = \dfrac{p_1}{2p_2} \qquad x_2^* = \left(w - \dfrac{p_1^2}{2p_2}\right) / p_2$
- $p_2 < p_1 \Rightarrow x_1^* = \left(w - \dfrac{p_2^2}{2p_1}\right) / p_1 \qquad x_2^* = \dfrac{p_2}{2p_1}$
- $p_2 = p_1 \Rightarrow$ valem as duas soluções

8) (a) $e_1 = p_1 x_1$

$$\Rightarrow \frac{de_1}{} = p_1 \frac{dx_1}{dp_1} + x_1$$

$$de_1 = \frac{p_1}{x_1}\frac{dx_1}{dp_1} x_1 + x_1$$

$$de_1 = \varepsilon_{11} x_1 + x_1 = x_1(1+\varepsilon_{11})$$

Se $\varepsilon_{11} = -1$ então:

$de_1 = 0$ (V).

(b) $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$

$$p_1 \frac{dx_1}{dw} + p_2 \frac{dx_2}{dw} = 1$$

$$\frac{p_1 x_1}{w}\frac{w}{x_1}\frac{dx_1}{dw} + \frac{p_2 x_2}{w}\frac{w}{x_2}\frac{dx_2}{dw} = 1$$

$$\frac{p_1 x_1}{w}\varepsilon_{1w} + \frac{p_2 x_2}{w}\varepsilon_{2w} = 1$$

$$p_1 x_1 \varepsilon_{1w} + p_2 x_2 \varepsilon_{2w} = w$$

Se $\varepsilon_{1w} > 1$ e $\varepsilon_{2w} > 1$ então a igualdade inicial não é satisfeita (V)

9 (a) Seja $x^* = x(p,w)$. Note que $p(\alpha x^*) \leq \alpha w$, ou seja, a cesta αx pode ser comprada aos preços p e renda αw.

Seja a cesta y tal que $py \leq \alpha w$. Logo $\frac{py}{\alpha} \leq w$. Como x^* é a escolha ótima aos preços p e renda w tem-se que

$$u\left(\frac{y}{\alpha}\right) \leq u(x^*).$$

Note que, como $u(\cdot)$ é homotética tem-se

$$u\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}u(y), \text{ Logo } u(y) \leq \alpha u(x^*).$$
$$u(y) \leq u(\alpha x^*)$$

Em palavras, aos preços p e renda αw, a cesta αx^* dá utilidade maior do que qualquer cesta y factível. Logo αx^* é a escolha ótima, isto é, $\alpha x^* = x(p, \alpha w)$.

Além disso, $v(p,\alpha w) = u[x(p,\alpha w)] = u[\alpha x(p,w)]$

$$v(p,\alpha w) = \alpha u[x(p,w)] = \alpha v(p,w)$$

Por fim, como $\alpha x^* = x(p,\alpha w)$ tem se que $x^* = w\underbrace{x(p,1)}_{\tilde{x}(p)}$. Analogamente $v(p,w) = w\underbrace{v(p,1)}_{\tilde{v}(p)}$