LISTA 4

1)

a). $$\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} u(x_1,x_2)$$

$$\text{s.a} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1a_1 + p_2a_2$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

b)
$$\left.\begin{aligned} &u^*: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &u^*(x_1,x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \end{aligned}\right\} \text{ representa as mesmas preferências}$$

Preferências monotonicas

$\forall x \in \mathbb{R}^2$ se $y \in \mathbb{R}^2$ é tal que $x \leq y$ (ou seja $x_i \leq y_i$ e $x_j < y_j$, $j \neq i$) então $x \prec y$.

As preferencias de questão são monotonicos:

Tome $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Seja $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ com $y_1 \geq x_1$ e $y_2 > x_2$

logo $u^*(x_1,x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{y_1} + \sqrt{x_2} < \sqrt{y_1} + \sqrt{x_2} = u^*(y_1,y_2)$

logo $(x_1,x_2) \prec (y_1,y_2)$

Na Primeira lista vimos que monotonicidade $\Rightarrow$ não saciedade local.

Concluimos que a restrição orçamentária vale com igualdade.

Como ver isto?

$\longrightarrow$

suponha que $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ seja a escolha ótima (que maximize a PMU), mas $p_1 x_1^* + p_2 x_2^* < p_1 a_1 + p_2 a_2$.

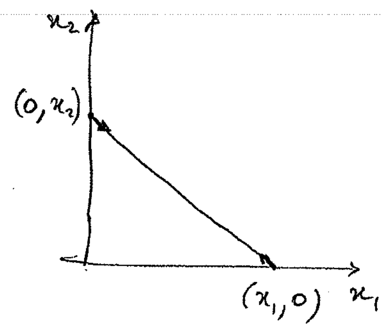
Se eu escolher $\varepsilon \sim 0$ (próximo a zero) tal que

$p_1 (x_1^* + \varepsilon) + p_2 x_2^* < p_1 a_1 + p_2 a_2$

Como $\succsim$ é monotônica, $(x_1^* + \varepsilon, x_2^*) > (x_1^*, x_2^*)$ implica que $(x_1^* + \varepsilon, x_2^*) \succ (x_1^*, x_2^*)$. Como $(x_1^* + \varepsilon, x_2^*)$ é factível então (x_1^*, x_2^*) não é a cesta ótima.

c) Existe soluções de canto? Não. A utilidade marginal avaliada nos cantos, $(0, x_2)$ e $(x_1, 0)$, é ∞^+. $u_1^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$, $u_2^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$

Isto significa que consumir um pouco mais do bem escasso cedendo o outro bem posso ter um ganho "enorme" de utilidade



$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = 0$

$u_1(0, x_2) dx_2 + u_2(0, x_2) dx_1 > 0$

d)
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 a_1 + p_2 a_2 \end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x_1}\, p_1} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x_2}\, p_2} \Rightarrow \sqrt{x_2}\, p_2 = \sqrt{x_1}\, p_1$$

$$x_2 = x_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 = p_1 a_1 + p_2 a_2$$

$$x_1 \left(p_1 + \frac{p_1^2}{p_2}\right) = p_1 a_1 + p_2 a_2$$

$$\boxed{x_1 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + \frac{p_1^2}{p_2}}}$$

e)

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

$$v(a_1, a_2, p_1, p_2) = \sqrt{\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + \frac{p_1^2}{p_2}}} + \sqrt{\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_2 + \frac{p_2^2}{p_1}}}$$

f) $\min \; p_1 x_1 + p_2 x_2$

$\quad$ s.a $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq u$

CPO: $\sqrt{x_2}\, p_2 = \sqrt{x_1}\, p_1$

$$\sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} \frac{p_1}{p_2}$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1} \frac{p_1}{p_2} \cancel{\geq} u$$

$$\sqrt{x_1}\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) = u$$

$$\sqrt{x_1} = \frac{u\, p_2}{p_1 + p_2}$$

$$\boxed{x_1^h = \left(\frac{u\, p_2}{p_1 + p_2}\right)^2} \qquad \boxed{x_2^h = \left(\frac{u\, p_1}{p_1 + p_2}\right)^2}$$

g) $e(p_1, p_2, u) = p_1 \left(\frac{u\, p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 + p_2 \left(\frac{u\, p_1}{p_1 + p_2} \right)^2$

2)

a)

$$x(p_x, p_y, a_x, a_y) = \frac{1}{2}\frac{(p_x a_x + p_y a_y)}{p_x}$$

$$y(p_x, p_y, a_x, a_y) = \frac{1}{2}\frac{(p_x a_x + p_y a_y)}{p_y}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(1,1,\frac{5}{2},\frac{15}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\left(1\cdot\frac{5}{2} + 1\cdot\frac{15}{2}\right)}{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{2} = 5 \\ y(1,1,\frac{5}{2},\frac{15}{2}) = 5 \end{array}\right\} U(5,5) = 25$$

b) $x(1/2, 1, 5/2, 15/2) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} + \frac{15}{2}\right)}{1/2} = \frac{5}{4} + \frac{15}{2} = \frac{35}{4} \sim 8{,}7$

$y(1/2, 1, 5/2, 15/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{15}{2}\right) = \frac{35}{8} \sim 4{,}3$

c) demandas hicksianas

$$\min \; p_x x + p_y y$$
$$x \cdot y \geq u$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{1}{y} - \lambda p_y = 0 \\ x\cdot y = u \end{array}\right\} \begin{array}{l} p_x x = p_y y \Rightarrow y = \frac{x \cdot p_x}{p_y} \\ x^2 \frac{p_x}{p_y} = u \Rightarrow x^2 = \frac{p_y}{p_x} u \\ \boxed{x = \sqrt{\frac{p_y}{p_x} u}} \end{array}$$

$$\boxed{y^h = \sqrt{\frac{p_x}{p_y} \cdot u}}$$

$$ET = x\left(\tfrac{1}{2}, 1, 5/2, 15/2\right) - x\left(1, 1, 5/2, 15/2\right) \simeq 8{,}7 - 5 \simeq 3{,}$$

$$ES = x^h\left(1/2, 1, u = 25\right) - x\left(1, 1, 5/2, 15/2\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{25} - 5 = 5\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$ER = ET - ES$$

b)

3)

a) $U(c,\ell) = c + \ln \ell$

$$\max_{c,\ell \in \mathbb{R}_+ \times [0,\bar{\ell}]} \quad c + \ln \ell$$

$$\text{s.a} \qquad p \cdot c \leq s(\bar{\ell} - \ell)$$

escolhe: c, ℓ

exógenas: $\bar{\ell}, p, s$

b) ~~[illegible]~~

possíveis cantos: $c = 0$

ou

$\ell = 0$

ou

$\ell = \bar{\ell}$

o caso $\ell = 0$ é impossível pois $U_2(c,\ell) = \dfrac{1}{\ell}$

e $\lim_{\ell \to 0} U_2(c,\ell) = \infty^+$

BASTA examinar $c=0$ ou $\ell = \bar{\ell}$.

mas se $c=0$ então $\ell = \bar{\ell}$ pois o indivíduo trabalha apenas para poder pagar o bem de consumo.

a única possível solução de canto é $(c,\ell) = (0,\bar{\ell})$

CPO:

$$1 - \lambda p = 0$$

$$\frac{1}{\ell} - \lambda s = 0$$

$$pc + s\ell = s\bar{\ell}$$

$$\boxed{\ell = \frac{p}{s}}$$

(soluções interior se $\frac{p}{s} < \bar{\ell}$ ou $\boxed{p < s\bar{\ell}}$)

se $p \geq s\bar{\ell} \Rightarrow (c^*, \ell^*) = (0, \bar{\ell})$

isto é, quando o preço do consumo excede o máximo ~~quanto~~ que pode pagar com o salário, ele prefere não trabalhar.

c)

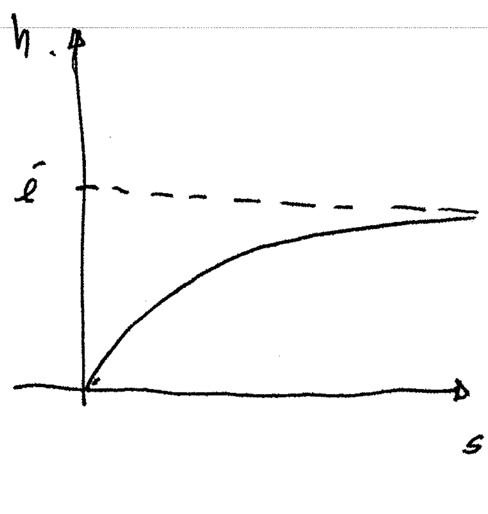
$h = \bar{l} - \frac{p}{s}$ se $\bar{\ell} > \frac{p}{s}$ e $h = 0$ caso contrário

$h = f(s)$

$f'(s) = \frac{p}{s^2} > 0$

$f''(s) = -\frac{2p}{s^3}$

$\lim_{s \to \infty} f(s) = \bar{\ell}$



4

a)

$$U(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2)$$

Probleme do Individuo

$$\max_{c_1, c_2} \ln(c_1) + \ln(c_2)$$

s.a

$$c_1 + S \leq a_1$$
$$c_2 \leq a_2 + S$$
$$c_1 \geq 0$$
$$c_2 \geq 0$$
$$S \geq 0$$

a)

$$c_1 + S = a_1$$
$$c_2 = a_2 + S$$

$$\max_{S} \ln(a_1 - S) + \ln(a_2 + S)$$

$$\frac{-1}{a_1 - S} + \frac{1}{a_2 + S} = 0$$

$$a_2 + S = a_1 - S$$

$$a_2 - a_1 = -2S \Rightarrow S = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

$\left(\begin{array}{c} a_1 > a_2 \\ \text{pois } S > 0 \end{array} \right)$

se $a_1 < a_2$ esta não é a solução

$$c_1 = a_1 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right) = \frac{2a_1 - a_1 + a_2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$c_2 = a_2 + \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$c_1(100, 100) = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

$$c_2(100, 100) = \frac{100 + 100}{2} = 100$$

b) $c_1(190, 10) = \frac{190 + 10}{2} = 100$

$c_2(190, 10) = 100$

c) Neste caso ($a_1 = 10$ e $a_2 = 190$) como não há mercado de crédito de produto, o indivíduo não pode consumir mais do que 10 unidades no primeiro período.

logo $c_1(10, 190) = 10$ e $c_2(10, 190) = 190$

$$\ln(10) + \ln(190) = \ln(1900) < \ln(10000) = \ln(100) + \ln(100)$$

logo ele está em situação pior em c)

d)

$$\max_{c_1, c_2} \ln(c_1) + \ln(c_2)$$

$$c_1 + s = a_1$$

$$c_2 = a_2 + (1+r)s$$

$$c_1 \geq 0$$

$$c_2 \geq 0$$

$$\max_{s} \ \ln(a_1 - s) + \ln(a_2 + (1+r)s)$$

CPO: $$\frac{-1}{a_1 - s} + \frac{(1+r)}{a_2 + (1+r)s} = 0$$

$$a_2 + (1+r)s = (1+r)(a_1 - s)$$

$$a_2 + (1+r)s = (1+r)a_1 - (1+r)s$$

$$2(1+r)s = (1+r)a_1 - a_2$$

$$\boxed{s = \frac{(1+r)a_1 - a_2}{2(1+r)}}$$

$$C_1 = a_1 - \left(\frac{(1+r)a_1 - a_2}{2(1+r)}\right)$$

$$C_1 = \frac{2(1+r)a_1}{2(1+r)} - \left(\frac{(1+r)a_1 - a_2}{2(1+r)}\right)$$

$$C_1 = \frac{(1+r)a_1 + a_2}{2(1+r)}$$

$$c_2 = a_2 + \cancel{(1+r)}\left(\frac{(1+r)a_1 - a_2}{2\cancel{(1+r)}}\right)$$

$$\boxed{C_2 = \frac{(1+r)a_1 + a_2}{2}}$$

d)

Ele está melhor em d)

Poderia ~~escolher~~ ter escolhido em d) $S=0$

$$S = \frac{(1{,}1)\,10 - 190}{2\,(1{,}1)} = \frac{11 - 190}{2{,}2} = \frac{-1790}{22} < 0$$

No entanto escolheu $S<0$ pois é que maximiza a utilidade.

De fato,

$$\ln(1900) < \ln\left(\frac{1{,}1 \cdot 10 + 190}{2\,(1{,}1)}\right) + \ln\left(\frac{1{,}1 \cdot 10 + 190}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(11 + 190)^2}{2{,}2 \cdot 2}\right) = \ln\left(\frac{201^2}{4{,}4}\right)$$

4)

e) $\max_{c_1, c_2} \; U(c_1) + \beta U(c_2)$

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} \leq \frac{a_2}{1+r} + a_1$$

$$c_1 \geq 0$$

$$c_2 \geq 0$$

CPO: $U'(c_1) - \lambda = 0$

$$\beta U'(c_2) - \frac{\lambda}{1+r} = 0$$

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = \frac{a_2}{1+r} + a_1$$

$$\boxed{\beta U'(c_2) = \frac{U'(c_1)}{1+r}}$$

(*) veja o item c) questão 5

$$c_1 = \frac{(1{,}2)\,10 + 190}{2\,(1{,}2)} = \frac{12 + 190}{2{,}4} = \frac{2020}{24} < \frac{2010}{22}$$

consome menos!

UTILIDADE INDIRETA: $v(a_1, a_2, r) = \ln\left[\frac{((1+r)a_1 + a_2)^2}{4(1+r)}\right]$

$$\frac{\partial v(a_1, a_2, r)}{\partial r} = \frac{2a_1}{(1+r)a_1 + a_2} - \frac{1}{1+r} > 0 \quad \text{se } a_1 > \frac{a_2}{1+r}$$

$$< 0 \quad \text{se } a_1 < \frac{a_2}{1+r}$$

f) $(*)$

$$\frac{\beta}{c_2} = \frac{1}{c_1(1+r)}$$

$$c_2 = \beta c_1 (1+r)$$

usando a restrição

$$c_1 + \frac{\beta c_1 \cancel{(1+r)}}{\cancel{1+r}} = \frac{a_2}{1+r} + a_1$$

$$\boxed{c_1 = \frac{a_2 + (1+r)a_1}{(1+r)(1+\beta)}}$$

$$c_2 = \beta(1+r)\left[\frac{a_2 + (1+r)a_1}{(1+r)(1+\beta)}\right]$$

$$\boxed{c_2 = \frac{\beta}{1+\beta}\left[a_2 + (1+r)a_1\right]}$$

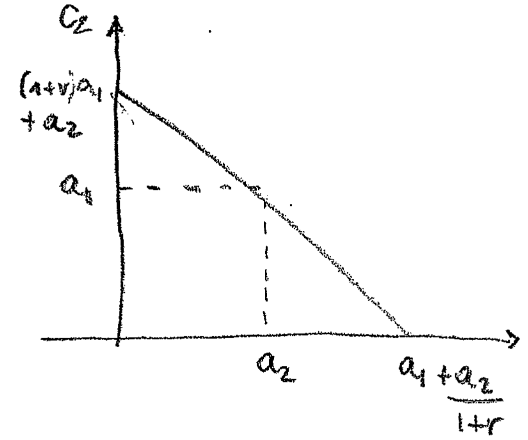
quando $\beta = 1$ encontramos os resultados anteriores.

$$c_2(100,100) = \frac{1/2}{1+1/2}\left[100 + (1{,}1).100\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[210\right] = 2.70 = 140$$

$$c_1 = \frac{100+110}{1{,}1.\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{210.2}{3{,}3} = \frac{420}{3{,}3}$$

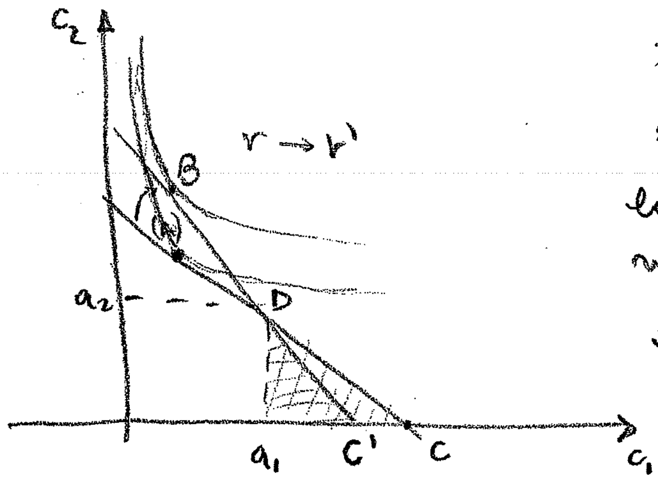
5)



$r \to r' \qquad r' > r$

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} \leq \frac{a_2}{1+r} + a_1$$

$$c_2 \leq -(1+r)c_1 + (1+r)a_1 + a_2$$



IDEIA

Suponha que $\succsim$ seja monotona logo a restrição inter temporal vale com igualdade.
Se ele consome a cesta A ($c_1 < a$) a taxa r.
Então A é preferido a qualquer cesta na região DCa_1

Quando $r \to r'$ $r' > r$, o individuo escolhe B. Com $B \succ A$ pois $B \geq A$.
Como qualquer cesta factível a taxa r' com $c_1 \geq a_1$ é no maximo tão boa quanto A, por transitividade

B é melhor do as custas mas quais é tomador de empréstimos.

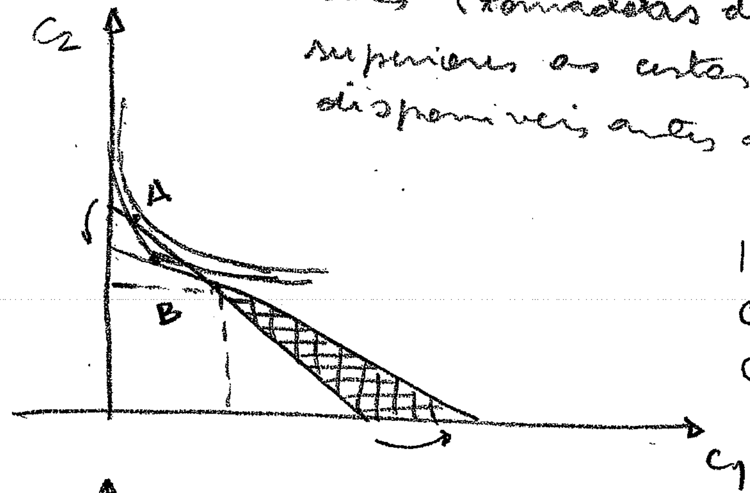
b)

$r \to r' \quad r' < r$

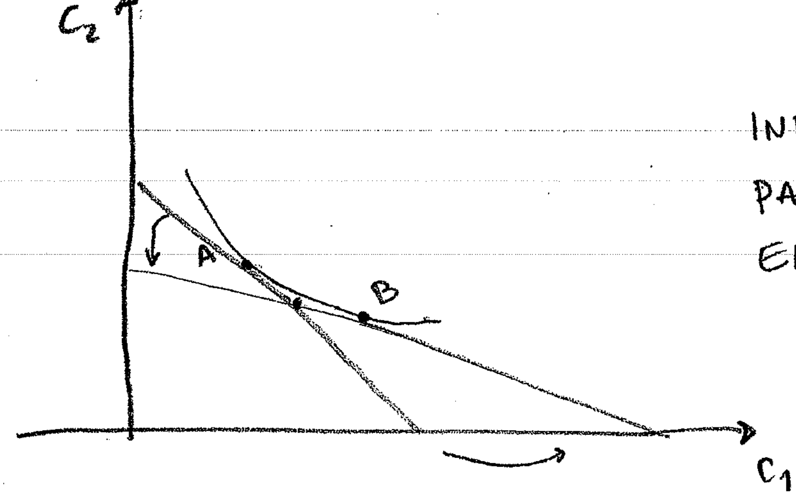
Não podemos utilizar o argumento de preferência revelada pois:

1) A cesta (A) não pertence mais à restrição orçamentária

2) Existe uma infinidade de cestas (tomadoras de empréstimos) superiores às cestas tomadas disponíveis antes da mudança.



INDIVIDUO CONTINUA COMO POUPADOR



INDIVIDUO PASSA A TOMAR EMPRESTIMO

c) suppose $U''(\cdot) < 0$

$$\max_{c_1, c_2} \quad U(c_1) + \beta U(c_2)$$

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = a_1 + \frac{a_2}{1+r}$$

$$\boxed{\beta U'(c_2) - \frac{U'(c_1)}{1+r} = 0} \quad (1)$$

$$\frac{c_2}{1+r} = -c_1 + a_1 + \frac{a_2}{1+r}$$

$$\boxed{c_2 = -(1+r)c_1 + (1+r)a_1 + a_2} \quad (2)$$

$$\beta U'\left(-(1+r)c_1 + (1+r)a_1 + a_2\right) - \frac{U'(c_1)}{1+r} = 0$$

$-c_1 + a_1 < 0$

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = -\left[\frac{\overbrace{\overset{\ominus}{\beta U''(c_2)}\left[\overset{\ominus}{(-c_1) + a_1}\right]}^{\oplus} + \overset{\oplus}{\frac{U'(c_1)}{(1+r)^2}}}{\underbrace{\beta U''(c_2)(-1)(1+r) - \frac{U''(c_1)}{1+r}}_{\oplus}}\right] < 0$$

6)

$$x(p) = 20 - \frac{p}{2}$$

$$x(p) = 10 - p$$

$$x(p) = 20 - p$$

Demanda AGREGADA

$$X(p) = 50 - \frac{5}{2}p$$

//

7) SUPONHA

$$p_x + 2p_y < 1000$$

(a) $$\frac{\partial x}{\partial w} = 1000 - p_x - 2p_y > 0 \quad (F)$$

(b) $$\frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x} = \frac{-\cancel{w} \cdot p_x}{(1000 - p_x - 2p_y)\cancel{w}} =$$

(F) $$= \frac{-p_x}{1000 - p_x - 2p_y} = \frac{-90}{1000 - 90 - 10} = \frac{-90}{900} = -0{,}1$$

(c)

$$\frac{\partial x}{\partial w} \cdot \frac{w}{x} = \frac{(1000 - p_x - 2p_y) \cdot w}{(1000 - p_x - 2p_y)\, w} = 1$$

(F)

d)

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x} = \frac{-2w \cdot p_y}{(1000 - p_x - 2p_y)\, w} =$$

$$= \frac{-2p_y}{1000 - 90 - 10} = \frac{-2 \cdot 5}{900} = \frac{-1\cancel{0}}{90\cancel{0}}$$

(F)

$$= -0{,}1/9$$

f) Suponha que a população de usuários de drogas seja ~~[illegible]~~ de tamanho 2.

1 é viciado e o outro não:

$x_V(p) = p^{-0{,}001}$ $\qquad \varepsilon_V = -0{,}001$ (pouco elastica)

$x_{\tilde{N}V}(p) = p^{-2}$ $\qquad \varepsilon_{\tilde{N}V} = -2$ (elastica)

$$X(p) = p^{-0{,}001} + p^{-2}$$

$$\varepsilon_T = \frac{\partial X(p)}{\partial p} \cdot \frac{p}{X(p)} = \frac{(-0{,}001 \cdot p^{-1{,}001} + -2\,p^{-3})\, p}{p^{-0{,}001} + p^{2}} = \longrightarrow$$

$$\varepsilon_T = \frac{-0{,}001\, p^{-1{,}001} - 2p^{-2}}{p^{-0{,}001} + p^{-2}} < \varepsilon_V = -0{,}01$$

para todo $p > 0$

logo $X(p)$ é mais elástica.