(1) (a) $\text{Max } e^{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{1/3}}$

s.a $p_1(x_1-a_1) + p_2(x_1-a_2) \leq w$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

(b) Note que $u(x_1,x_2)$ é fortemente monótona, pois $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} > 0$. Se $u(x_1,x_2)$ é fortemente monótona então é localmente não-saciável. Nesse caso a restrição orçamentária do consumidor vale com igualdade, ou seja, toda a renda é esgotada no consumo de x_1 e x_2.

(c) Como funções utilidade são ordinais, é possível fazer uma transformação monotônica crescente e continuar representando as mesmas preferências. Nesse caso é conveniente definir:

$$\tilde{u}(x_1,x_2) = [\ln(u)]^3 = \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$$

(d) $\mathcal{L} = \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} + \lambda\,[w - p_1(x_1-a_1) - p_2(x_2-a_2)]$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0$$

$$p_1(x_1-a_1) + p_2(x_2-a_2) = w$$

$$\lambda = \frac{1}{2p_1\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2p_2\sqrt{x_2}}$$

$$p_2\sqrt{x_2} = p_1\sqrt{x_1}$$

$$x_1 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 x_2$$

$$p_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 x_2 - a_1\right] + p_2(x_2 - a_2) = w$$

$$p_2 x_2\left(\frac{p_2}{p_1} + 1\right) = w + p_1a_1 + p_2a_2$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}\,\frac{w + p_1a_1 + p_2a_2}{p_1 + p_2}$$

$$x_1 = \frac{p_2}{p_1}\,\frac{w + p_1a_1 + p_2a_2}{(p_1 + p_2}$$

(e) $$v(p, a, w) = e\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}\frac{w+p_1a_1+p_2a_2}{p_1+p_2}} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}\frac{w+p_1a_1+p_2a_2}{p_1+p_2}}\right]^{1/3}$$

$$v(p, a, w) = e\left[\sqrt{\frac{w+p_1a_1+p_2a_2}{(p_1+p_2)p_1p_2}}\,(p_2^2+p_1^2)\right]^{1/3}$$

(f) O problema de minimização de despesa (PMD) pode ser escrito como:

$$\text{Max} \quad -p_1(x_1 - a_1) - p_2(x_2 - a_2)$$

$$\text{s.a.} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq [\ln(u)]^3 \quad (*)$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Como os problemas PMU e PMD são duais sabemos que [do item (d)] que:

$$p_2\sqrt{x_2} = p_1\sqrt{x_1}$$

Por não-saciedade local a restrição (*) vale com igualdade. Logo

$$\frac{p_2\sqrt{x_2}}{p_1} + \sqrt{x_2} = [\ln(u)]^3$$

$$\sqrt{x_2} = \frac{p_1}{p_1+p_2}[\ln(u)]^3$$

$$h_2 = \frac{p_1^2}{(p_1+p_2)^2}[\ln(u)]^6$$

$$h_1 = \frac{p_2^2}{(p_1+p_2)^2}[\ln(u)]^6$$

(g) $e(p,u) = p_1h_1 + p_2h_2 - p_1a_1 - p_2a_2$

$$e(p,u) = \frac{[\ln(u)]^6}{(p_1+p_2)^2}(p_1p_2^2 + p_2p_1^2) - p_1a_1 - p_2a_2$$

$$e(p,u) = \frac{p_1p_2}{(p_1+p_2)^2}[\ln(u)]^6(p_1+p_2) - p_1a_1 - p_2a_2$$

$$e(p,u) = \frac{p_1p_2}{p_1+p_2}[\ln(u)]^6 - p_1a_1 - p_2a_2$$