Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Jogos Estáticos de Informação Incompleta

Marcelo Sant'Anna

FGV EPGE

19 de outubro de 2019

Jogos Estáticos de Informação Incompleta

Nos jogos de informação **completa** os payoffs de todos os jogadores eram *common knowledge*. Nos jogos de informação **incompleta**, pelo menos um agente não conhece os payoffs de algum oponente.

Jogos de informação incompleta são também conhecidos por **Jogos Bayesianos**, devido a utilização da regra de Bayes para atualização das crenças sobre os payoffs dos agentes adversários.

Os leilões formam a classe de jogos estáticos de informação incompleta mais relevante. Grande parte dos jogos bayesianos de maior interesse são dinâmicos.

Exemplo 1

Suponha que tenhamos um duopólio de Cournot em um mercado com demanda inversa

$$p(Q) = a - Q,$$

em que $Q = q_1 + q_2$.
O custo da firma 1 é dado por $C(q_1) = cq_1$. O custo da firma 2 é

$$C(q_2) = \begin{cases} c_H q_2 \text{ com prob. } \theta, \\ c_L q_2 \text{ com prob. } 1 - \theta, \end{cases}$$

em que $c_H > c_L$. A firma 2 conhece seu próprio custo, mas a firma 1 não conhece o custo da firma 2.

Modelando a incerteza sobre payoffs

Formalizamos a noção de incerteza sobre payoffs adversários através de dois conceitos relacionados:

- **Tipos:**
  Representamos os possíveis payoffs do agente i em um conjunto de **tipos** T_i. O payoff do agente i é então escrito como $u_i(s_1, \ldots, s_n; t_i)$, em que $t_i \in T_i$. No Exemplo 1, $T_2 = \{c_H, c_L\}$ e $T_1 = \{c\}$.

- **Crenças:**
  Dizemos que a distribuição de probabilidade $p_i(t)$ forma a **crença** do indivíduo i sobre a distribuição conjunta tipos na economia $t \in \prod_{i=1}^{n} T_i$.
  No Exemplo 1, $p_1(c_H) = \theta$ e $p_1(c_L) = 1 - \theta$.

Forma normal

Definição 1 (Forma normal de jogos bayesianos)

A representação na **forma normal** de um jogo bayesiano especifica:

- O conjunto de jogadores: $1, \ldots, n$;
- Os conjuntos de ações disponíveis para cada jogador: $A_1, \ldots, A_n$;
- Os espaços de tipos para cada jogador: $T_1, \ldots, T_n$;
- As crenças sobre a distribuição conjunta de tipos: $p_1, \ldots, p_n$;
- Funções payoffs: $u_1, \ldots, u_n$.

Denotamos o jogo Bayesiano então por

$$G = \{A_1, \ldots, A_n; T_1, \ldots, T_n; p_1, \ldots, p_n; u_1, \ldots, u_n\}.$$

Uso da regra de Bayes

O Exemplo 1 era específico no sentido de que não havia incerteza sobre o tipo do agente 1. Em geral, o tipo do agente pode ser informação relevante para a distribuição de tipos adversários, o que motiva o uso da regra de Bayes para atualização de crenças:

$$p_i(t_{-i}|t_i) = \frac{p_i(t_{-i}, t_i)}{p_i(t_i)}.$$

Exemplo 2

Estendemos o jogo de Cournot bayesiano do Exemplo 1 para incorporar incerteza também em relação ao tipo do agente 1. Suponha que a crença do agente 1 seja:

$$p_1(c_H^1, c_H^2) = 1/3$$
$$p_1(c_H^1, c_L^2) = 1/6$$
$$p_1(c_L^1, c_H^2) = 1/6$$
$$p_1(c_L^1, c_L^2) = 1/3$$

Equilíbrio de Bayes-Nash

Definição 2 (Estratégia no jogo bayesiano)

Em um jogo bayesiano $G = \{A_1, \dots, A_n; T_1, \dots, T_n; p_1, \dots, p_n; u_1, \dots, u_n\}$, uma **estratégia** para um jogador i é uma função $s_i : T_i \to A_i$.

Definição 3 (Equilíbrio de Bayes-Nash)

Em um jogo bayesiano G, como acima, o perfil de estratégias $(s_1^\star, \dots, s_n^\star)$ formam um **Equilíbrio de Bayes-Nash** se para cada agente i e para cada tipo do agente i, $t_i \in T_i$, $s_i^\star(t_i)$ resolve:

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i \left(s_1^\star(t_1), \dots, s_{i-1}^\star(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^\star(t_{i+1}), \dots, s_n^\star(t_n); t_i \right) p_i(t_{-i} | t_i)$$

Exemplo 3 (Batalha dos sexos, revisitada)

A partir do jogo batalha dos sexos, introduzimos incerteza quanto aos payoffs dos agentes.

		Jogador 2: Ópera	Jogador 2: MMA
Jogador 1	Ópera	$2+t_1$,1	0,0
	MMA	0,0	1,$2+t_2$

t_1 e t_2 são informação privada, respectivamente, dos jogadores 1 e 2. Os espaços de tipos são simétricos: $T_1 = T_2 = [0, x]$. As crenças são uniformes no espaço de tipos, ou seja, dadas por $p_1(t_2) = p_2(t_1) = \frac{1}{x}$.

- Qual Equilíbrio de Bayes-Nash do jogo?
- Como o comportamento dos jogadores no Equilíbrio de Bayes-Nash se compara ao comportamento no EN em estratégias mistas do jogo quando $x \to 0$?

Reinterpretando estratégias mistas

"the crucial feature of a mixed strategy equilibrium is not that player j chooses a strategy randomly, but rather that player i is uncertain about player j's choice; this uncertainty can arise either because of randomization or (more plausibly) because of a little incomplete information"

Leilão selado de primeiro preço

Descrição do jogo:

Vamos estudar um leilão simples, com dois jogadores, $i = 1, 2$. O objeto leiloado tem valor v_i para o jogador i, ou seja, se o jogador ganha o leilão pagando um valor p, seu payoff é $v_i - p$. Os valores são independentes e uniformemente distribuidos, $v_i \sim U[0, 1]$. Os participantes submetem seus lances (valores não-negativos) simultaneamente. O participante com maior lance ganha o bem pagando por ele o seu lance. Caso haja empate, o vencedor é decidido por cara e coroa.

Leilão selado de primeiro preço

Representação na forma normal:

- $A_1 = A_2 = [0, \infty)$,
- $T_1 = T_2 = [0, 1]$,
- Crenças: $p_1(v_1, v_2) = p_1(v_1, v_2) = 1$ (densidade da dist. unif.)
- Payoffs:

$$u_i(b_1, b_2; v_i) = \begin{cases} v_i - b_i, & \text{se } b_i > b_j \\ (v_i - b_i)/2, & \text{se } b_i = b_j \\ 0, & \text{se } b_i < b_j \end{cases}$$

Derivando a estratégia ótima:

Vamos procurar um perfil de equilíbrio que seja simétrico: suponha que 1 e 2 adotem a estratégia $b : [0,1] \to \mathbb{R}_+$. Vamos nos restringir também a $b(\cdot)$ que seja estritamente crescente e diferenciável.

Para um determinado valor de v_i, o problema do jogador i é

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) \Pr(b_i > b(v_j))$$

Leilão selado de primeiro preço

Seja $b^{-1}(\cdot)$ a função inversa de $b(\cdot)$. Logo $b^{-1}(b_j) = v_j$ e

$$\Pr(b_i > b(v_j)) = \Pr(b^{-1}(b_i) > v_j) = b^{-1}(b_i).$$

Substituindo no problema do jogador i:

$$\max_{b_i} (v_i - b_i)\, b^{-1}(b_i)$$

com CPO:

$$-b^{-1}(b_i) + (v_i - b_i)\frac{d}{db_i} b^{-1}(b_i) = 0$$

$$-b^{-1}(b_i) + (v_i - b_i)\frac{d}{db_i}b^{-1}(b_i) = 0$$

Se $b(\cdot)$ é de fato a estratégia de EBN, então:

$$-b^{-1}(b(v_i)) + (v_i - b(v_i))\frac{d}{db_i}b^{-1}(b(v_i)) = 0,$$

que pode ser reescrito como

$$-v_i + (v_i + b(v_i))\frac{1}{b'(v_i)} = 0.$$

ou então, rearranjando os termos,

$$b'(v_i)v_i + b(v_i) = v_i.$$

$$b'(v_i)v_i + b(v_i) = v_i$$

é uma equação diferencial que define $b(\cdot)$. Note que podemos reescrevê-la como

$$\frac{db_i(v_i)v_i}{dv_i} = v_i.$$

Integrando dos dois lados ficamos com

$$b(v_i)v_i = \frac{1}{2}v_i^2 + k.$$

O valor de k pode ser encontrado usando um pouco de economia. Se $v_i = 0$, trivialmente, $b_i = 0$. Então, logo, $k = 0$, e ficamos finalmente com uma expressão para a função bid de EBN:

$$b(v_i) = \frac{1}{2}v_i.$$