Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Jogos Estáticos de Informação Completa

Marcelo Sant'Anna

FGV EPGE

9 de setembro de 2019

Pano de fundo

Em Equilíbrio Geral, toda interação entre os agentes da economia é intermediada por preços de mercado e tínhamos que

1. Os agentes tomavam preços como dado;
2. As ações dos agentes no mercado formam os preços - *market clearing*.

Nesses casos, apesar das ações dos agentes afetarem uns aos outros, o problema de cada agente não dependia de ação tomada pelos outros agentes. Os problemas de cada agente eram essencialmente de decisão individual.

Uma exceção era o caso de Monopólio, em que a única firma no mercado reconhecia o fato de que sua decisão de oferta tinha um efeito sobre o preço de mercado (em contraste com a firma competitiva). Mesmo assim podíamos escrever o problema do monopolista como um problema de decisão individual, uma vez que a função demanda era dada.

Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos é o estudo de problemas de decisão multi-agente.

Nesse tipo de problema, os agentes levam em conta o fato de que estão em uma situação de interdependência estratégica:

- *Payoffs* (lucros, utilidade, etc.) dependem das ações tomadas por outros agentes

Exemplos:

- Oligopólios: a extensão natural do problema do monopolista para $n \geq 2$ firmas,
- Processos de barganha,
- Leilões,
- Finança corporativa,
- Política internacional.

Exemplo 1 (Dilema dos Prisioneiros)

A polícia capturou dois conhecidos assaltantes de banco. As evidências contra eles são pequenas, então se nenhum dos dois confessar, serão condenados a apenas 1 mês de cadeia. Se os dois confessam, pegam 6 meses de cadeia cada. Mas se um confessa e o outro não, o que confessa sai livre, enquanto o outro pega 9 meses de cadeia. Os dois são postos em duas salas separadas e precisam tomar suas decisões (confessar ou não) simultaneamente.

Representação na forma normal

Informalmente ...

A representação de um jogo na forma normal deve informar:

1. O conjunto de jogadores;
2. Ações (ou estratégias) disponíveis para cada jogador;
3. O *payoff* de cada agente para cada combinação de estratégias que podem ser escolhidas pelos agentes.

Representação na forma normal

Formalmente ...

- Temos n agentes, indexados por $i = 1, \ldots, n$.
- Cada agente $i = 1, \ldots, n$ escolhe uma ação $s_i \in S_i$,
- e tem a função *payoff* $u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$.

Definição 1 (Definição de um jogo na forma normal)

A representação de um jogo de n jogadores na ***forma normal*** *deve especificar o espaço de estratégias de cada jogador* $S_1, \ldots, S_n$ *e suas funções payoff* $u_1, \ldots, u_n$. *Nós denotamos esse jogo na* ***forma normal*** *pelo conjunto:*

$$G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$$

Estratégias estritamente dominadas

Definição 2 (Estratégia estritamente dominada)

Em um jogo na forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$, *sejam* $s_i', s_i'' \in S_i$. *Dizemos que* s_i' *é* ***estritamente dominada*** *por* s_i'' *se, para qualquer combinação de estratégias dos outros jogadores, o payoff de* i *quando joga* s_i' *é sempre estritamente menor do que o payoff obtido jogando* s_i'':

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n\right),$$

para cada $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$.

Estratégias estritamente dominadas

Jogadores racionais não jogam estratégias estritamente dominadas (por que?). Se acreditamos que os jogadores são racionais, então deveríamos desconsiderar (eliminar) as estratégias dominadas.

Vamos levar essa ideia de eliminação de estratégias estritamente dominadas um passo além...

Considere o seguinte exemplo de um jogo na forma normal:

Exemplo 2

		Jogador 2		
		Esq	*Centro*	*Dir*
Jogador 1	*Cima*	*1,0*	*1,2*	*0,1*
	Baixo	*0,3*	*0,1*	*2,0*

Eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas

No Exemplo 2, note que:

1. A estratégia *Dir* é estritamente dominada pela estratégia *Centro* para o jogador 2
   $\rightarrow$ eliminamos *Dir* do jogador 2;

Eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas

No Exemplo 2, note que:

1. A estratégia *Dir* é estritamente dominada pela estratégia *Centro* para o jogador 2
   $\rightarrow$ eliminamos *Dir* do jogador 2;
2. Sem a estratégia *Dir*, *Cima* domina estritamente *Baixo* para o jogador 1
   $\rightarrow$ eliminamos *Baixo* do jogador 1;

Eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas

No Exemplo 2, note que:

1. A estratégia *Dir* é estritamente dominada pela estratégia *Centro* para o jogador 2
   $\rightarrow$ eliminamos *Dir* do jogador 2;
2. Sem a estratégia *Dir*, *Cima* domina estritamente *Baixo* para o jogador 1
   $\rightarrow$ eliminamos *Baixo* do jogador 1;
3. Sem as estratégias *Dir* e *Baixo*, *Centro* domina estritamente *Esq* para o jogador 2
   $\rightarrow$ eliminamos *Esq* do jogador 2.

A esse processo chamamos de **eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas (EIEED)**. Nesse caso apenas o par $\{Cima, Centro\}$ sobrevive ao processo de eliminação iterada.

Possíveis críticas ao processo de EIEED

- Racionalidade ilimitada e *common knowledge*
  Se desejamos aplicar o processo de EIEED um número arbitrário de vezes precisamos supor que é *common knowledge* que os agentes são racionais, ou seja, os agentes sabem que os outros são racionais, que sabem que os outros são racionais, que sabem que os outros são racionais e assim por diante.

- Pouco restritivo
  Em geral são muitas as estratégias que sobrevivem ao processo de EIEED. O Exemplo 2 é útil para ilustrar o conceito, mas um caso bem particular.

Estratégias Fracamente Dominadas

Definição 3 (Estratégia fracamente dominadas)

Em um jogo na forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$, *sejam* $s_i', s_i'' \in S_i$. *Dizemos que* s_i' *é* ***fracamente dominada*** *por* s_i'' *se o payoff de* i *quando joga* s_i' *é sempre menor ou igual do que o payoff obtido jogando* s_i'' *para qualquer combinação de estratégias dos outros jogadores, com desigualdade estrita para pelo menos um perfil de estratégias dos adversários:*

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \leq u_i\left(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n\right),$$

para cada $s_{-i} \in S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$, *com desigualdade estrita para pelo menos um perfil* s_{-i}.

- Dominância estrita $\Rightarrow$ Dominância fraca
  - O conjunto de estratégias que sobrevive ao processo de EIEFD está contido no conjunto de estratégias que sobrevive ao processo de EIEED.

Estratégias Racionalizáveis

Definição 4 (Melhor resposta)

Em um jogo na forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$, $s_i' \in S_i$ *é uma* ***melhor resposta*** *às estratégias adversárias* $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ *se*

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \geq u_i\left(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n\right),$$

para todo $s_i \in S_i$.

Definição 5 (Estratégias racionalizáveis)

As estratégias que sobrevivem ao processo de eliminação iterada de estratégias que ***nunca*** *são melhores respostas são chamadas de* ***racionalizáveis****.*

Um outro conceito de solução

Suponha que temos um jogo na forma normal:

$$G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$$

Imagine que a Teoria dos Jogos proponha um determinado perfil de estratégias $(s_1^\star, \ldots, s_n^\star) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ como a única solução para o jogo. Então é uma propriedade desejável que nessa solução:

- Cada jogador i esteja disposto realmente a jogar a estratégia prescrita para ele $s_i^\star$.
- Então $s_i^\star$ deve ser uma melhor resposta ao que os outros jogadores estão fazendo,
- ou seja, i não pode ter incentivos a desviar de $s_i^\star$, quando todos os outros jogadores jogam $s_{-i}^\star$.

Essa ideia serve de motivação para o conceito de solução mais importante da Teoria dos Jogos:

Definição 6 (Equilíbrio de Nash)

Em um jogo na forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$*, o perfil de estratégias* $(s_1^\star, \ldots, s_n^\star)$ *é um* ***Equilíbrio de Nash*** *se, para cada jogador* i*,* $s_i^\star$ *é uma melhor resposta dadas as estratégias especificadas para os outros* $n-1$ *jogadores,* $(s_1^\star, \ldots, s_{i-1}^\star, s_{i+1}^\star, \ldots, s_n^\star)$*:*

$$u_i(s_1^\star, \ldots, s_{i-1}^\star, s_i^\star, s_{i+1}^\star, \ldots, s_n^\star) \geq u_i(s_1^\star, \ldots, s_{i-1}^\star, s_i, s_{i+1}^\star, \ldots, s_n^\star),$$

para qualquer $s_i \in S_i$*, ou seja,*

$$s_i^\star \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_1^\star, \ldots, s_{i-1}^\star, s_i, s_{i+1}^\star, \ldots, s_n^\star\right).$$

Multiplicidade e existência de Equilíbrios de Nash

Um jogo pode ter vários Equilíbrios de Nash, como o exemplo seguinte demonstra:

Exemplo 3 (*The Battle of the Sexes* (sic))

		Jogador 2	
		Ópera	*MMA*
Jogador 1	*Ópera*	*2,1*	*0,0*
	MMA	*0,0*	*1,2*

Multiplicidade e existência de Equilíbrios de Nash

Um jogo pode ter vários Equilíbrios de Nash, como o exemplo seguinte demonstra:

Exemplo 3 (*The Battle of the Sexes* (sic))

		Jogador 2	
		Ópera	*MMA*
Jogador 1	*Ópera*	*2,1*	*0,0*
	MMA	*0,0*	*1,2*

Ou ainda nenhum Equilíbrio:

Exemplo 4 (Cobrança de pênalti)

		Goleiro	
		Esq.	*Dir.*
Artilheiro	*Esq.*	*-1,1*	*1,-1*
	Dir.	*1,-1*	*-1,1*

Equilíbrio de Nash e EIEED

Teorema 1

Em um jogo na forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$*, se a eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas elimina todas as estratégias a não ser o perfil* $(s_1^\star, \ldots, s_n^\star)$*, então esse perfil de estratégias é o único Equilíbrio de Nash de* G*.*

Teorema 2

Em um jogo na forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$*, se o perfil de estratégias* $(s_1^\star, \ldots, s_n^\star)$ *é um Equilíbrio de Nash, então esse perfil também sobrevive ao processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas.*

Duopólio de Cournot

Estendemos o caso de monopólio para a situação em que há duas firmas ($i = 1, 2$) que produzem o mesmo bem (homogêneo). As firmas precisam decidir simultaneamente o quanto produzir.

- A demanda inversa do mercado é dada por

$$p(Q) = a - bQ,$$

  em que Q é a quantidade total produzida (soma da produção das duas firmas).
- O custo de cada firma é $C_i(q) = cq$.

Duopólio de Cournot

Como podemos representar esse jogo na forma normal?

- Dois jogadores $i = 1, 2$.
- Escolhas de cada jogador: $s_i \in \mathbb{R}_+ = S_i$.
- Payoffs $\pi_i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$:

$$\pi_i(s_i, s_j) = p(s_i + s_j)s_i - cs_i.$$

Duopólio de Cournot

Vamos procurar pelo Equilíbrio de Nash (ou Cournot-Nash) do jogo de escolhas em quantidades.

Se um par $(s_1^\star, s_2^\star)$ é um Equlíbrio de Nash do jogo de escolha de quantidades, então:

$$s_1^\star \in \arg\max_{s_1 \geq 0} \pi_1(s_1, s_2^\star),$$
$$s_2^\star \in \arg\max_{s_2 \geq 0} \pi_2(s_2, s_1^\star).$$

Duopólio de Cournot

Vamos procurar pelo Equilíbrio de Nash (ou Cournot-Nash) do jogo de escolhas em quantidades.

Se um par $(s_1^\star, s_2^\star)$ é um Equlíbrio de Nash do jogo de escolha de quantidades, então:

$$s_1^\star \in \arg\max_{s_1 \geq 0} \pi_1(s_1, s_2^\star),$$
$$s_2^\star \in \arg\max_{s_2 \geq 0} \pi_2(s_2, s_1^\star).$$

Logo, pelas CPOs,

$$s_1^\star = \frac{1}{2b}\left(a - bs_2^\star - c\right),$$
$$s_2^\star = \frac{1}{2b}\left(a - bs_1^\star - c\right),$$

com solução $s_1^\star = s_2^\star = \frac{a-c}{3b}$.

Oligopólio de Cournot

Agora vamos supor que existam $N \geq 2$ firmas competindo a la Cournot no mercado.

- A demanda do mercado é função da quantidade total produzida, $Q = \sum_{i=1}^{N} s_i$
  $p(Q)$ é a demanda inversa.
- Cada firma tem o mesmo custo marginal constante: $C_i(s) = cs$

O problema da firma i de escolha de quantidades, tomando como dado o que as outras firmas escolhem $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ é:

$$\max_{s_i} p\left(\sum_{j \neq i} s_j + s_i\right) s_i - cs_i$$

Limite competitivo do oligopólio de Cournot

A CPO do problema da firma $i = 1, \ldots, N$ é

$$p'(Q)s_i + p(Q) = c.$$

Pela simetria do problema, $s_i = Q/N$, para todo $i = 1, \ldots, N$:

$$p'(Q)\frac{Q}{N} + p(Q) = c.$$

- Quando $N = 1$, temos exatamente a solução do monopolista.
- Quando $N \to \infty$,

  $$p(Q) = c,$$

  ou seja, a solução competitiva.

Duopólio de Bertrand

No duopólio de Bertrand as duas firmas escolhem **preços** simultaneamente.

- Vamos começar estudando o caso em que os produtos das duas firmas são diferenciados (não homogêneos). A demanda de mercado pelo produto da firma i é

$$q_i(p_1, p_j) = a - p_i + bp_j,$$

em que $0 < b < 2$.

- As duas firmas produzem a um custo marginal constante c.

Duopólio de Bertrand

O lucro da firma i como função das escolhas de preço das firmas pode ser escrito como:

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)p_i - cq_i(p_i, p_j).$$

O problema de escolha ótima de p_i tomando como dada escolha de p_j:

$$p_i = \frac{1}{2}\left(a + bp_j + c\right).$$

No E.N. de escolha simultânea de preços:

$$p_1^\star = p_2^\star = \frac{a+c}{2-b}.$$

Duopólio de Bertrand com produtos homogêneos

Suponha agora que os produtos das duas firmas são homogêneos. Nesse caso, os consumidores compram o produto da firma que o oferece ao menor preço. Se a demanda inversa do mercado é dada por $q(p)$, então a demanda pelo produto da firma i (demanda residual da firma i) é:

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} q(p_i) & \text{se } p_i < p_j, \\ \frac{1}{2}q(p_i) & \text{se } p_i = p_j, \\ 0 & \text{se } p_i > p_j, \end{cases}$$

Teorema 3

Existe um único equilíbrio de Nash no duopólio de Bertrand com produtos homogêneos. Nesse equilíbrio as duas apreçam ao custo marginal de produção: $p_1^\star = p_2^\star = c$.

Definição 7 (Estratégia Mista)

Em um jogo na forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$, suponha que $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iK}\}$. Então uma ***estratégia mista*** *para o jogador i é uma distribuição de probabilidade $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{iK})$, tal que $0 \leq p_{ik} \leq 1$ para $k = 1, \ldots, K$ e $\sum_{k=1}^{K} p_{ik} = 1$.*

- As estratégias no conjunto $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iK}\}$ chamamos de **estratégias puras**.
- Denotamos por

$$\Delta(S_i) = \left\{ (p_{i1}, \ldots, p_{iK}) \in [0,1]^K : \sum_{k=1}^{K} p_{ik} = 1 \right\}$$

  o espaço de estratégias mistas derivadas do espaço de estratégias puras S_i.
- Assim podemos expandir a representação na forma normal do jogo, incluindo estratégias mistas: $G = \{\Delta(S_1), \ldots, \Delta(S_n), u_1, \ldots, u_n\}$.

Estratégias Mistas - Payoffs

Assim como escrevíamos o payoff dos agentes como resultado de um perfil de estratégias puras, $u_i(s_1, \ldots, s_n)$, também podemos escrever o payoff como função de estratégias mistas como a esperança do payoff do agente dado um perfil de estratégias mistas $(p_1, \ldots, p_n) \in \Delta(S_1) \times \ldots \Delta(S_n)$.

No caso mais simples em que há apenas dois agentes, podemos escrever a esperança do payoff do agente i como função do perfil de estratégias mistas (p_1, p_2) como

$$v_1(p_1, p_2) = \sum_{j=1}^{K} p_{2j} \left[\sum_{m=1}^{K} p_{1m} u_i \left(s_{1m}, s_{2j} \right) \right].$$

Assim como em estratégias puras definimos o que seria uma estratégia melhor resposta a um perfil de estratégias adversárias no caso de estratégias puras, também podemos defini-la no caso de estratégias mistas da mesma maneira.

Definição 8 (Melhor resposta - Estratégias mistas)

Em um jogo na forma normal $G = \{\Delta(S_1), \ldots, \Delta(S_n), u_1, \ldots, u_n\}$, $p_i' \in \Delta(S_i)$ *é uma* ***melhor resposta*** *às estratégias adversárias* $(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n)$ *se*

$$v_i\left(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i', p_{i+1}, \ldots, p_n\right) \geq v_i\left(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n\right),$$

para todo $p_i \in \Delta(S_i)$.

Estratégias Mistas - Equilíbrio de Nash

Definição 9 (EN em Estratégia Mista)

Em um jogo na forma normal $G = \{\Delta(S_1), \ldots, \Delta(S_n), u_1, \ldots, u_n\}$*, as estratégias mistas* $(p_1^\star, \ldots, p_n^\star) \in \Delta(S_1) \times \ldots \times \Delta(S_n)$ *são um* ***Equilíbrio de Nash*** *se as estratégias mistas de cada jogador são uma* ***melhor resposta*** *as estratégias dos outros jogadores no perfil.*

Teorema 4 (Nash - 1950)

Em um jogo na forma normal $G = \{\Delta(S_1), \ldots, \Delta(S_n), u_1, \ldots, u_n\}$*, se* n *é finito e* S_i *é finito para cada* i*, então existe pelo menos um Equilíbrio de Nash para o jogo* G*, possivelmente envolvendo estratégias estritamente mistas.*