

Microeconomia II: Teoria dos Jogos

Jogos Dinâmicos de Informação Completa

Marcelo Sant'Anna

FGV EPGE

11 de outubro de 2019

Exemplo 1 (Ameaça da granada)

O jogador 1 precisa decidir se entrega ou não ao jogador 2 R\$ 1000. O jogador 2, caso o jogador 1 não entregue os R\$ 1000, precisa decidir se explode uma granada que mataria os dois jogadores (payoff = $-\infty$).

Como representaríamos o jogo do Exemplo 1 na forma normal?

		Jogador 2	
		Explode	Não explode
Jogador 1	Entrega	-1000,1000	-1000,1000
	Não entrega	$-\infty, -\infty$	0,0

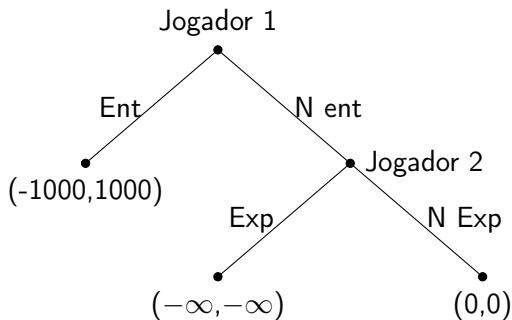
Quais são os EN do jogo?

Se o jogador 2 toma sua decisão após observar a ação do jogador 1, é crível o EN (Entrega, Explode)?

Nos jogos dinâmicos, alguns agentes podem tomar uma ação já tendo observado movimentos anteriores dos outros jogadores. A questão central nesses jogos será a credibilidade de determinado comportamento, uma vez que algumas ações do jogo já estão 'afundadas' quando os jogadores tomam suas decisões.

Indução retroativa

A representação na forma normal não explicita a dinâmica do jogo. Agora propomos uma outra forma de representar o jogo:



Apesar de mais de um EN, apenas (N ent, N Exp) por indução retroativa.

Definição 1 (Forma Extensiva)

A representação de um jogo na **forma extensiva** deve especificar:

- Os jogadores;
- Ações dos jogadores:
 - Quando cada jogador se movimenta;
 - Ações disponíveis em cada instância em que é chamado a se movimentar;
 - A informação que o jogador tem a cada momento em que se movimenta;
- O payoff recebido por cada jogador para cada combinação de movimentos dos jogadores.

Exemplo 2 (Stackelberg)

O ambiente econômico é o mesmo de Cournot. Duas firmas (1,2) escolhem quantidades de um bem homogêneo que produzem a um custo marginal c .

A demanda inversa do mercado é

$$p(Q) = a - bQ,$$

em que $Q = q_1 + q_2$ é a quantidade total do mercado.

A diferença está no timing do jogo. No duopólio de Stackelberg, a firma 1, a líder, escolhe primeiro sua quantidade. A firma 2, a seguidora, observa a quantidade escolhida pela líder e escolhe em seguida a sua quantidade.

Exemplo 3 (Barganha em três estágios)

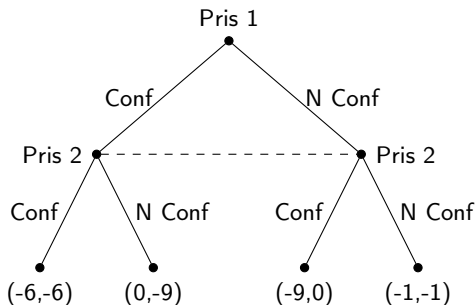
Dois jogadores (A,B) procuram uma forma de dividir uma barra de chocolate.

- 1 O Jogador A propõe uma divisão. Se o jogador B aceita a divisão, cada um fica com o que foi proposto.*
- 2 Se o jogador B não aceita, faz a sua proposta. Se A aceita, ficam com o que foi proposto por B.*
- 3 Se A não aceita, A decide unilateralmente como dividir.*

A barra de chocolate fica menos valiosa a cada período a taxa δ .

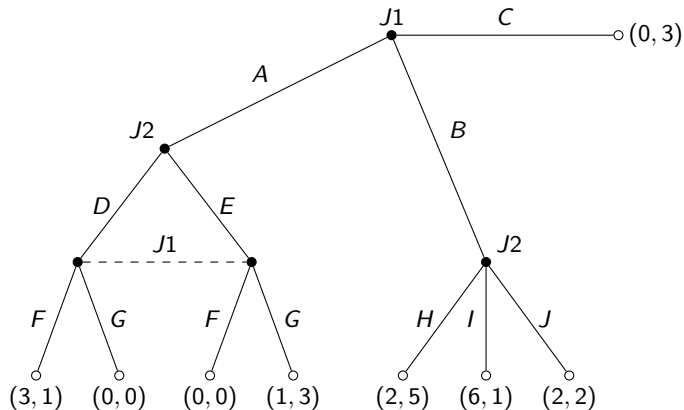
Já vimos como representar jogos dinâmicos na forma normal. Porém qualquer jogo representado na forma normal também pode ser representado na forma extensiva.

Por exemplo, podemos representar o dilema dos prisioneiros na forma extensiva como



Jogos de dinâmicos de informação completa, mas imperfeita

Um outro exemplo mais elaborado:



Definição 2 (Conjunto informacional)

Um **conjunto informacional** para um jogador é uma coleção de nós de decisão tal que:

- (i) é o jogador que se move em cada nó;
- (ii) quando o jogador chega em um nó no conjunto informacional, o jogador que se move não consegue distinguir entre os nós do conjunto informacional.

Definição 3 (Subjogo)

Um **subjogo** é um jogo na forma extensiva

- (i) que começa em um determinado nó de decisão “ n ” em um conjunto de informação com apenas um nó de decisão,
- (ii) inclui todos os nós de decisão que sucedem “ n ” e
- (iii) não corta nenhum conjunto de informação.

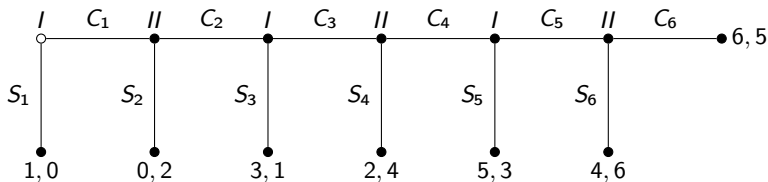
Agora definimos um conceito de equilíbrio que incorpora naturalmente a ideia de indução retroativa.

Definição 4 (ENPS)

Um Equilíbrio de Nash é Perfeito em Subjogos se o perfil de estratégias dos jogadores constitui um Equilíbrio de Nash em todos os subjogos do jogo original.

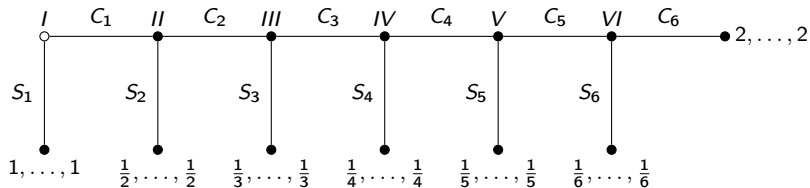
Voltando ao Exemplo 1, o perfil (Ent, Exp) apesar de EN do jogo, não é perfeito em subjogos, pois não é EN do subjogo que se inicia no nó de decisão do Jogador 2. Apenas (N Ent, N Exp) é EN de todos subjogos e é portanto o único ENPS.

Críticas ao ENPS



Após o jogador II observar ação C_1 por parte de I, deveria supor que a ação foi apenas um erro ou um sinal de que o jogador I poderia jogar C_3 no futuro?

Críticas ao ENPS



O perfil de ENPS é sustentado por uma longa cadeia de ações C . Se o jogador I imagina que existe a possibilidade de erros no futuro, ele deveria continuar jogando C_1 ? E se ele pensa isso, será que II também não faz um raciocínio similar?

Estratégias Mistas em jogos dinâmicos

Em jogos dinâmicos, há duas maneiras de concebermos a randomização de movimentos:

- **Estratégias Mistas:**

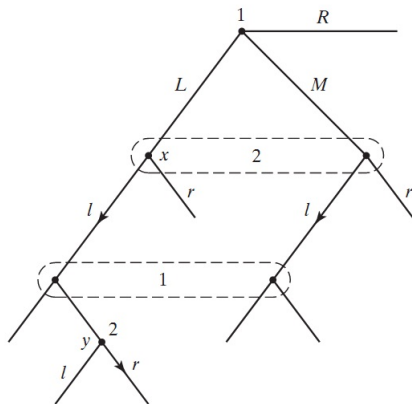
Especifica uma randomização sobre todos os planos completos de ação. A ideia aqui é a mesma de estratégias mistas em jogos estáticos. Para cada estratégia pura $s_{ik} \in S_i$, atribuímos uma probabilidade $p(s_{ik})$ de que a estratégia s_{ik} é escolhida.

$$\sum_{s_{ik} \in S_i} p(s_{ik}) = 1.$$

- **Estratégias Comportamentais:**

Especifica uma randomização sobre as ações disponíveis em cada conjunto informacional do jogador. Ou seja, ela define uma probabilidade $b_i(a, I)$ de que o jogador no conjunto informacional I escolha a ação $a \in A(I)$:

$$\sum_{a \in A(I)} b_i(a, I) = 1, \text{ para todo conjunto informacional } I.$$



O jogador 1 se “esquece” o que jogou em seu primeiro nó de decisão. Esse jogo não tem **perfect recall**.

Em jogos com *perfect recall*, toda estratégia mista tem uma estratégia comportamental equivalente e vice versa.

Teorema 1 (Selten)

Todo jogo na forma extensiva com perfect recall possui um ENPS, possivelmente envolvendo randomização.

Jogos repetidos - Introdução

Agora estudamos como a interação repetida pode afetar o comportamento dos jogadores. Vamos ver como a possibilidade de ameaças críveis sobre o comportamento futuro podem induzir ações em ENPS que não eram viáveis em EN sem a interação repetida.

Exemplo 4 (Dilema dos prisioneiros repetido 2 vezes)

Suponha que o jogo abaixo seja jogado 2 vezes. Ou seja, em um primeiro estágio os jogadores 1 e 2 escolhem simultaneamente suas ações. Tendo observado as ações escolhidas no primeiro estágio, decidem simultaneamente as ações no segundo estágio. O payoff dos jogadores é a soma dos payoffs obtidos nos dois estágios.

		Jog. 2	
		L_2	R_2
Jog. 1	L_1	1,1	5,0
	R_1	0,5	4,4

Definição 5

Seja G um jogo estático na forma normal, denotamos por $G(T)$ o jogo repetido em que G é repetido T vezes, com as todas as ações pregressas observadas antes da ação seguinte. Os payoffs de $G(T)$ são a soma dos payoffs de todos os T estágios.

Teorema 2

Se o jogo estágio G tem um único Equilíbrio de Nash então para qualquer $T < \infty$, o jogo repetido $G(T)$ tem um único resultado em Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos: o perfil de EN de G é jogado em todos os estágios.

Exemplo 5

Vamos considerar uma expansão do jogo estágio do dilema dos prisioneiros repetido duas vezes. Agora o jogo estágio é dado por:

		Jog. 2		
		L_2	M_2	R_2
Jog. 1	L_1	1,1	5,0	0,0
	M_1	0,5	4,4	0,0
	R_1	0,0	0,0	3,3

Exemplo 6 (Dilema dos prisioneiros repetido infinitamente)

Suponha que o jogo abaixo seja jogado infinitamente. Ou seja, em cada instância t , os jogadores 1 e 2 escolhem simultaneamente suas ações. Eles observam todas as ações até a rodada $t - 1$.

		Jog. 2	
		L_2	R_2
Jog. 1	L_1	1,1	5,0
	R_1	0,5	4,4

O payoff dos jogadores é a soma dos payoffs obtidos em todos os estágios descontados pelo fator δ :

$$\pi_0 + \delta\pi_1 + \delta^2\pi_2 + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_t$$

Exemplo 7 (Duopólio de Cournot repetido infinitamente)

Em um mercado de um bem homogêneo, duas firmas competem a cada período à la Cournot. Os custos marginais de ambas são constantes e iguais a c . A demanda inversa pelo produto da firma é dada por $p(q)$, em que $p(q) \rightarrow 0$ quando $q \rightarrow \infty$. As firmas descontam os lucros futuros usando o fator δ .

- 1 *Qual o menor valor de δ tal que as firmas possam sustentar os lucros de monopólio como resultado de ENPS usando estratégias de reversão permanente ao EN?*
- 2 *Podemos sustentar payoffs médios menores do que o de EN?*