Lista de Exercícios # 7 - Gabarito

1. Uma pequena central hidroelétrica (PCH) opera em um rio com uma cooperativa de pescadores a jusante. A vazão do rio é controlada pela hidroelétrica. Quanto menor a vazão da hidroelétrica, menor a disponibilidade de peixes para a comunidade de pescadores.

   O lucro da PCH como função da vazão v do rio é

   $$\pi_{PCH}(v) = 100v - v^2.$$

   Por sua vez o lucro da cooperativa de pescadores é

   $$\pi_f(v) = 20v.$$

   (a) Qual a escolha unilateral de vazão por parte da PCH?

   Sugestão de resposta.
   O problema da PHC é

   $$\max_v \quad 100v - v^2$$

   Cuja condição de primeira ordem implica em

   $$v_{PHC} = 50$$

   □

   (b) Qual a vazão socialmente ótima?

   Sugestão de resposta.
   O problema d planejador social é

   $$\max_v \quad 100v - v^2 + 20v$$

   Cuja condição de primeira ordem implica em

   $$v_S = 60$$

   □

(c) Sugira um imposto/subsídio de Pigou sobre a vazão do rio que leva a PCH a escolher o nível eficiente de vazão.

Sugestão de resposta.
O problema da PHC com um imposto Pigouviano com tarifa t é

$$\max_{v} \quad 100v - v^2 - tv$$

Cuja condição de primeira ordem implica em

$$v_P = 50 - \frac{t}{2}$$

Como queremos t tal que $v_P = v_S$, então devemos ter

$$50 - \frac{t}{2} = 60 \implies t = -20$$

ou seja, devemos ter um subsídio de 20 unidades monetárias para cada unidade de vazão. $\square$

2. Em uma pequena cidade há duas siderúrgicas, 1 e 2, que emitem partículas sólidas em suspensão na atmosfera (PM), nocivas à saúde da população. Os lucros das firmas, como função das respectivas emissões de PM são dados por

$$\pi_1(h_1) = 8h_1 - h_1^2,$$
$$\pi_2(h_2) = 4h_2 - h_2^2.$$

Cada morador da cidade é afetado pela soma das emissões de PM das duas firmas $\tilde{h} = h_1 + h_2$. O bem-estar agregado da população como função da emissão total de PM é

$$\sum_i u_i\left(\tilde{h}\right) = -\tilde{h}^2.$$

(a) Com qual tipo de externalidade a cidade está lidando?

Sugestão de resposta.

$$u(\tilde{h}) := \sum_i u_i\left(\tilde{h}\right) = -\tilde{h}^2$$

Como $u'(\tilde{h}) = -2\tilde{h} < 0$, então a externalidade é negativa (poluição prejudica o bem-estar da população). □

(b) Qual a quantidade total de PM emitida caso não haja qualquer intervenção?

Sugestão de resposta.
O problema da siderúrgica 1 é

$$\max_{h_1} \quad 8h_1 - h_1^2$$

Cuja condição de primeira ordem implica em

$$h_1^* = 4$$

O problema da siderúrgica 2 é

$$\max_{h_2} \quad 4h_2 - h_2^2$$

Cuja condição de primeira ordem implica em

$$h_2^* = 2$$

Logo $\tilde{h}^* = h_1^* + h_2^* = 6$ □

(c) Qual a quantidade socialmente ótima total de PM emitida, $\tilde{h}^0$?

Sugestão de resposta.
O problema do planejador social é

$$\begin{aligned} &\max_{h_1,h_2} \; 8h_1 - h_1^2 + 4h_2 - h_2^2 - (h_1+h_2)^2 \\ \equiv &\max_{h_1,h_2} \; 8h_1 - 2h_1^2 + 4h_2 - 2h_2^2 - 2h_1h_2 \end{aligned}$$

Cujas condições de primeira ordem são

$$\begin{cases} -4h_1^0 + 8 - 2h_2^0 = 0 \\ -2h_1^0 + 4 - 4h_2^0 = 0 \end{cases}$$

as quais implicam em $h_1^0 = 2$ e $h_2^0 = 0$. Logo, $\tilde{h}^0 = 2$. □

(d) Suponha agora que a cidade obrigue cada firma a emitir um máximo de $\tilde{h}^0/2$. A alocação de emissões é eficiente? Explique.

Sugestão de resposta.
Pelo item anterior temos que o bem-estar social máximo (ES^0) é igual a

$$ES^0 = 8*2 - 2^2 + 4*0 - 0^2 - (2+0)^2 = 8$$

Com a quota máxima igual a $\frac{\tilde{h}^2}{2} = 1$, ambas as firmas emitirão a quota máxima, pois $\pi_1'(h_1) > 0$ e $\pi_2'(h_2) > 0$ para $h_1, h_2 \in [0,1)$. Nesse caso, o bem-estar social alcançado (ES^q) é igual a

$$ES^q = 8*1 - 1^2 + 4*1 - 1^2 - (1+1)^2 = 6$$

Logo, a alocação de emissões não é eficiente. Isso ocorre porque a siderúrgica 1 geraria mais bem-estar social do que a siderúrgica 2, caso detivesse as quotas da mesma. □

(e) Suponha agora que a cidade mantenha a quota de $\tilde{h}^0/2$ por firma, mas permita que as firmas negociem livremente as quotas em um mercado competitivo. Quais as emissões de cada firma nesse equilíbrio competitivo? Explique.

Sugestão de resposta.
Para a siderúrgica 2, o direito de emitir uma unidade de PM vale

$$\pi_2(1) - \pi_2(0) = (4*1 - 1^2) - (4*0 - 0^2) = 3$$

Para a siderúrgica 1, o direito de emitir uma unidade adicional de PM vale

$$\pi_1(2) - \pi_1(1) = (8*2 - 2^2) - (8*1 - 1^2) = 5$$

Portanto, com a possibilidade de negociação, a firma 1 compraria a quota da firma 2 a um preço $p \in [3, 5]$. Com isso passamos a ter $h_1 = 2$ e $h_2 = 0$, a alocação eficiente. $\square$

3. Numa vila agrícola convivem n pastores de ovelhas e há um único campo onde as ovelhas tem que pastar. Cada pastor $i \in \{1, \ldots, n\}$ decide o número de ovelhas $g_i \in \mathbb{R}_+$ (ovelhas são continuamente divisíveis) que ele cria e leva para pastar no campo. O valor para os pastores de cada ovelha sua que pasta no campo é dado pela função $v(G)$, onde $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$ é a quantidade total de ovelhas pastando no campo. A função $v(G)$ tem $v'(G) < 0$ e $v''(G) < 0$ para $G < G_{max}$, onde G_{max} é a quantidade de ovelhas que faz $v(G_{max}) = 0$. O custo para os pastores de cuidar de cada ovelha sua que pasta no campo é c. Considerando soluções interiores para os problemas de maximização, responda:

   (a) Qual é a quantidade total $G^\star$ de ovelhas pastando no campo em equilíbrio competitivo (de Nash), quando cada pastor escolhe individualmente quantas ovelhas leva?

   Sugestão de resposta.
   Cada pastor resolve

$$\max_{g_i \in \mathbb{R}_+} \quad v(G) g_i - c g_i$$

   Cuja condição de primeira ordem implica em

$$g_i^* = -\frac{(v(G^*) - c)}{v'(G^*)}$$

   Como os pastores são idênticos e $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$, temos

$$G^* = \sum_{i=1}^{n} g_i^* = -n \frac{(v(G^*) - c)}{v'(G^*)} \tag{1}$$

   $\square$

   (b) Qual é a quantidade total o G de ovelhas pastando no campo na alocação socialmente ótima, e como esta se compara com $G^\star$?

   Sugestão de resposta.
   A alocação socialmente ótima resolve

$$\max_{g \in \mathbb{R}_+^n} \quad \sum_{j=1}^{n} v\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right) g_j - c \sum_{j=1}^{n} g_j$$

   Cuja condição de primeira ordem em relação a uma entrada g_j do vetor $g \in \mathbb{R}_+^n$ é

$$v'\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^0\right) \sum_{i=1}^{n} g_i^0 + v\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^0\right) - c = 0$$
$$\implies g_j^0 = -\frac{(v(G^0) - c)}{v'(G^0)} - \sum_{i \neq j} g_i^0$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
G^0 = \sum_{j=1}^{n} g_j^0 &= -n\frac{(v(G^0)-c)}{v'(G^0)} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j} g_i^0 \\
&= -n\frac{(v(G^0)-c)}{v'(G^0)} - (n-1)G^0 \\
\implies G^0 &= -\frac{(v(G^0)-c)}{v'(G^0)}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Para ver que $G^* > G^0$ vamos supor o contrário e chegar numa contradição. Suponha que $G^* \leq G^0$. Como $v'(.) < 0$, deve valer que $v(G^0) \leq v(G^*)$, logo de (3) e (2) temos

$$c - G^0 v'(G^0) \leq c - \frac{G^*}{n} v'(G^*)$$

Rearranjando termos

$$v'(G^0) \geq \frac{G^*}{nG^0} v'(G^*)$$

Como $v''(.) < 0$, devemos ter $v'(G^*) \geq v'(G^0)$, o que junto do resultado acima implica em

$$v'(G^*) \geq \frac{G^*}{nG^0} v'(G^*)$$

Ou ainda,

$$1 \leq \frac{G^*}{nG^0}$$

Mas note que a situação acima não pode ocorrer se a nossa hipótese inicial for válida ($G^* \leq G^0$), pois para qualquer $n > 1$ teríamos

$$\frac{G^*}{nG^0} > 1$$

Portanto, se a hipótese inicial for válida, deveria também valer que $1 < 1$, o que é impossível. Assim, concluímos que deve valer que $G^* > G^0$. □

(c) Qual é o valor do subsídio/taxa que deve ser imposta sobre cada pastor no equilíbrio competitivo de modo a se obter a alocação socialmente ótima, e como esta varia com o número de pastores n?

Sugestão de resposta.
O problema de cada pastor passa a ser

$$\max_{g_i \in \mathbb{R}_+} \quad v(G)g_i - cg_i - tg_i$$

Cuja condição de primeira ordem implica em

$$g_i^t = -\frac{(v(G^t) - c)}{v'(G^t)} + \frac{t}{v'(G^t)}$$

Como os pastores são idênticos e $G^t = \sum_{i=1}^n g_i^t$, temos

$$G^t = \sum_{i=1}^{n} g_i^t = -n\frac{(v(G^t) - c)}{v'(G^t+)} + \frac{nt}{v'(G^t)} \tag{3}$$

Queremos encontrar t que faça $G^t = G^0$, logo t deve ser tal que

$$\begin{aligned} -n\frac{(v(G^t) - c)}{v'(G^t+)} + \frac{nt}{v'(G^t)} &= G^0 \\ \implies nG^0 + \frac{nt}{v'(G^t)} &= G^0 \\ \implies t = -\frac{(n-1)}{n}v'(G^0)G^0 &> 0 \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\partial t}{\partial n} = -\frac{1}{n^2}v'(G^0)G^0 > 0$$

logo a taxa aumenta conforme aumenta o número de pastores.

Intuitivamente, a taxa que implementa a alocação socialmente ótima é aquela que faz os pastores internalizarem a externalidade imposta aos demais pastores, sendo esta maior quanto mais pastores são afetados. □