MICROECONOMIA II — 2º SEMESTRE 2019
PROF. MARCELO SANT'ANNA — FGV EPGE
MONITOR: BRUNO OGAVA

LISTA DE EXERCÍCIOS # 6 - GABARITO

1. Duas firmas competem a cada período $t = 0, \ldots, T$ à la Cournot em um mercado com demanda inversa

$$p(q) = 10 - q$$

e custo marginal constante igual a 2. Payoffs futuros são descontados pelo fator δ, ou seja, o payoff de um fluxo de lucros $\{\pi_0, \ldots, \pi_T\}$ é

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t \pi_t.$$

Antes de um período começar, todas as ações passadas são observadas por todos os jogadores.

(a) Suponha $T = 1$, ou seja, o jogo é repetido por dois períodos ($t = 0, 1$).

i. O que uma estratégia na forma normal desse jogo deve especificar?

Sugestão de resposta.
Uma estratégia deve especificar a ação que o jogador irá tomar em cada estágio, para cada possível história de jogadas até o estágio anterior. □

ii. Defina o espaço de estratégias na forma normal para as duas firmas.

Sugestão de resposta.
No primeiro estágio ($t = 0$) cada firma escolherá uma quantidade (não negativa) que irá produzir, ou seja, a firma i escolherá $\sigma_{i0} \in \mathbb{R}_+$. Já no segundo estágio ($t = 1$), sabendo o que jogou no primeiro estágio e observando a jogada de seu rival, a firma i escolherá o quanto irá produzir, ou seja, uma função $\sigma_{i1} : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Logo, o espaço de estratégias será $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ representa o espaço das funções que mapeiam $\mathbb{R}^2_+$ em $\mathbb{R}_+$. □

iii. Encontre um ENPS para o jogo.

Sugestão de resposta.
Note que o jogo estágio possui um único Equilíbrio de Nash, onde cada firma escolhe produzir $\frac{8}{3}$ unidades do bem. Além disso, o jogo estágio é repetido um número finito de vezes. Portanto, há um único ENPS no qual cada firma escolhe produzir $\frac{8}{3}$ em cada período. □

(b) Agora suponha que $T = \infty$, ou seja, o jogo de Cournot se repete por infinitos períodos.

i. Defina uma estratégia de gatilho para esse jogo.

Sugestão de resposta.
Uma estratégia de gatilho para o jogador i é tal que:
Joga s_i no primeiro estágio. No t-ésimo estágio, se o resultado de todos os $t-1$ estágios anteriores for (s_1, s_2), então joga s_i, caso contrário joga $\frac{8}{3}$. $\square$

ii. Encontre o menor valor de δ tal que a estratégia de gatilho de reversão permanente ao Equilíbrio de Nash possa sustentar o payoff de monopólio (em que as duas firmas dividem o lucro de monopólio) como ENPS.

Sugestão de resposta.
No jogo estágio temos:

- Curva de reação:

$$q_i^*(q_j) = 4 - \frac{q_j}{2}$$

- Equilíbrio de Cournot:

$$q_i^* = q_j^* = \frac{8}{3} \implies \pi_i^C = \pi_j^C = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

- Monopólio:

$$\begin{aligned} q^M = 4 &\implies q_i^M = q_j^M = 2 \\ \pi^M = 16 &\implies \pi_i^M = \pi_j^M = 8 \end{aligned}$$

- Desvio mais lucrativo:

$$q_i^d = q_i^*(q_j^M) = 3 \implies \pi_i^d = 9$$

O menor valor de δ tal que a estratégia de gatilho de reversão permanente ao EN sustenta o payoff de monopólio como ENPS é tal que

$$\begin{aligned} \pi^M + \delta^*\pi^M + \delta^{*2}\pi^M + \ldots &= \pi^d + \delta^*\pi^C + \delta^{*2}\pi^C + \ldots \\ \sum_{t=0}^{\infty} \delta^{*t}\pi^M &= \pi^d + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{*t}\pi^C \\ \sum_{t=0}^{\infty} \delta^{*t}\pi^M &= \pi^d + \delta^* \sum_{t=0}^{\infty} \delta^{*t}\pi^C \\ \frac{\pi^M}{1-\delta^*} &= \pi^d + \frac{\delta^*\pi^C}{1-\delta^*} \end{aligned}$$

Substituindo:

$$
\begin{aligned}
\frac{8}{1-\delta^*} &= 9 + \frac{\delta^* \left(\frac{8}{3}\right)^2}{1-\delta^*} \\
8 &= (1-\delta^*)9 + \delta^* \frac{64}{9} \\
\frac{17}{9}\delta^* &= 1 \\
\delta^* &= \frac{9}{17}
\end{aligned}
$$

$\square$

2. Considere um duopólio de Cournot operando em um mercado com demanda inversa

$$p(Q) = a - bQ, \text{ em que } Q = q_1 + q_2.$$

As duas firmas tem função custo $c(q) = cq$, porém a demanda é incerta: Ela é alta (a_H) com probabilidade θ e baixa (a_L) com probabilidade $1-\theta$. Além disso a informação é assimétrica. A firma 1 sabe o estado da demanda, mas a firma 2 não. As duas firmas escolhem suas quantidades simultaneamente.

(a) Quais os espaços de **ações** para as duas firmas?

Sugestão de resposta.
Como ambas as firmas têm que escolher uma quantidade (não negativa) para produzir, o espaço de ações para ambas as firmas é o $\mathbb{R}_+$. □

(b) Quais os espaços de **estratégias** para as duas firmas?

Sugestão de resposta.
Como a firma 1 tem dois tipo, $\{H, L\}$, o espaço de estratégias para a firma 1 será o espaço das funções que mapeiam $\{H, L\}$ em $\mathbb{R}_+$.

Como a firma 2 tem um único tipo, o espaço de estratégias para a firma 2 será o mesmo que seu espaço de ações, ou seja, $\mathbb{R}_+$. □

(c) Qual Equilíbrio de Bayes-Nash desse jogo? Faça hipóteses sobre a_H, a_L e θ de forma que todas as quantidades de equilíbrio sejam positivas.

Sugestão de resposta.
O problema da firma 1 tipo i é

$$\max_{q_1^i} \; (a^i - b(q_1^i + q_2) - c)q_1^i$$

Cuja condição de primeira ordem implica que

$$q_1^{i*}(q_2) = \frac{a^i - c - bq_2}{2b}$$

O problema da firma 2 é

$$\max_{q_2} \; \theta(a^H - b(q_1^H + q_2) - c)q_2 + (1-\theta)(a^L - b(q_1^L + q_2) - c)q_2$$

Cuja condição de primeira ordem implica que

$$q_2^*(q_1^H, q_1^L) = \frac{\theta(a^H - bq_1^H) + (1-\theta)(a^L - bq_1^L) - c}{2b}$$

Um equilíbrio de Bayes-Nash é tal que

$$\begin{cases} q_1^{H*}(q_2^*(q_1^{H*}, q_1^{L*})) = q_1^{H*} \\ q_1^{L*}(q_2^*(q_1^{H*}, q_1^{L*})) = q_1^{L*} \\ q_2^*(q_1^{H*}(q_2^*), q_1^{L*}(q_2^*)) = q_2^* \end{cases}$$

Substituindo as funções encontradas no sistema acima e o resolvendo, encontramos

$$\begin{aligned} q_1^{H*} &= \frac{(5-b\theta)a^H - (1-\theta)ba^L + (3b-5)c}{10b} \\ q_1^{L*} &= \frac{-b\theta a^H + (5-(1-\theta)b)a^L + (3b-5)c}{10b} \\ q_2^* &= \frac{\theta a^H + (1-\theta)a^L - 3c}{5} \end{aligned}$$

O equilíbrio de Bayes-Nash é $((q_1^{H*}, q_1^{L*}), q_2^*)$.

$\square$

3. Considere o leilão selado de primeiro preço estudado em aula em que os valores são distribuídos de forma independente com densidade uniforme em $[0, 1]$. Agora suponha que tenhamos n participantes. Mostre que o Equilíbrio de Bayes-Nash do jogo tem como estratégias de equilíbrio:

$$b_i^\star(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i.$$

Sugestão de resposta.
Para um determinado valor de v_i, o problema do jogador i é

$$\max_{b_i} \ (v_i - b_i) P(b_i > \max_{j \neq i} b(v_j))$$

Mas note que

$$\begin{aligned} P(b_i > \max_{j \neq i} b(v_j)) &= P(b^{-1}(b_i) > \max_{j \neq i} v_j) \\ &= \prod_{j \neq i} P(b^{-1}(b_i) > v_j) \\ &= \prod_{j \neq i} b^{-1}(b_i) \\ &= (b^{-1}(b_i))^{(n-1)} \end{aligned}$$

Substituindo no problema do jogador i

$$\max_{b_i} \ (v_i - b_i)(b^{-1}(b_i))^{(n-1)}$$

Do qual obtemos a condição de primeira ordem

$$-b^{-1}(b_i) + (v_i - b_i)(n-1) \frac{\partial b^{-1}(b_i)}{\partial b_i} = 0$$

Se $b(.)$ é de fato a estratégia de Equilíbrio de Bayes-Nash:

$$\begin{aligned} -b^{-1}(b_i(v_i)) + (v_i - b_i(v_i))(n-1) \frac{\partial b^{-1}(b_i(v_i))}{\partial b_i} &= 0 \\ -v_i + (v_i - b(v_i))(n-1) \frac{1}{b'(v_i)} &= 0 \\ b'(v_i) v_i^{(n-1)} + (n-1) b(v_i) &= (n-1) v_i^{(n-1)} \\ \frac{\partial (b(v_i) v_i^{(n-1)})}{\partial v_i} &= (n-1) v_i^{(n-1)} \end{aligned}$$

Integrando de ambos os lados

$$b(v_i) v_i^{(n-1)} = \frac{n-1}{n} v_i^n + k$$

Usando a condição de contorno $b(0) = 0$ encontramos que $k = 0$ e

$$b(v_i)v_i^{(n-1)} = \frac{n-1}{n}v_i^n$$
$$b(v_i) = \frac{n-1}{n}v_i$$

$\square$

4. Considere um jogo simples de sinalização para o mercado de trabalho. Um trabalhador pode ser de 2 tipos: alto (h) ou baixo (ℓ), ambos tipos ocorrem com igual probabilidade. O trabalhador conhece o seu tipo e toma uma decisão de fazer ou não faculdade. A firma não observa o tipo do trabalhador, apenas sua decisão de cursar ou não faculdade. A firma então decide ofertar ou não uma vaga ao trabalhador.

   O payoff dos trabalhadores é dado por:

$$u_{trab} = w - e,$$

   em que e representa o esforço em se educar e w o salário auferido na firma. Tanto e e w dependem das escolhas de trabalhadores e firmas:

$$w = \begin{cases} 1 & \text{se a firma oferece a vaga,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$e = \begin{cases} 1 & \text{se faz faculdade e tipo } \ell, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

   ou seja, o trabalhador só tem um custo em se educar se for tipo ℓ. Por sua vez, o lucro da firma é dado por

$$u_{firma} = \begin{cases} 1 & \text{se contrata o tipo } h, \\ -1 & \text{se contrata o tipo } \ell, \\ 0 & \text{se não contrata.} \end{cases}$$

   Note que não há nenhum valor intrínseco na educação nesse modelo. A firma só se importa com o tipo nato do trabalhador.

   (a) Encontre um *Perfect Bayesian Equilibrium* (PBE) separador em que o trabalhador de tipo h escolha fazer faculdade e o de tipo ℓ escolha não fazer faculdade.

   Sugestão de resposta.
   Represente com f a decisão do trabalhador de fazer faculdade e com nf a decisão do trabalhador de não fazer faculdade.

   Como estamos procurando um PBE separador em que o trabalhador de tipo h escolhe fazer faculdade e o de tipo ℓ escolhe não fazer, estamos procurando um PBE com as seguintes crenças $P(h|f) = P(\ell|nf) = 1$ e $P(h|nf) = P(\ell|f) = 0$, de acordo com a Regra de Bayes. Sob essas crenças, se a firma observa que um trabalhador fez faculdade então ela o contrata e não o contrata caso contrário.

   Agora, para que esta situação de fato seja um equilíbrio, devemos checar se o trabalhador não gostaria de desviar da estratégia separadora $(f|h, nf|\ell)$ caso a firma siga a estratégia $(\text{contrata}|f, \text{não contrata}|nf)$. De fato, se a firma segue tal estratégia, para o trabalhador do tipo h é ótimo fazer faculdade, enquanto o trabalhador do tipo ℓ fica indiferente entre fazer faculdade ou não.

Juntando ambas as estratégias, temos um PBE separador em que o trabalhador decide fazer faculdade se, e somente se, é do tipo h e a firma decide contratar o trabalhador se, e somente se, ele fez faculdade. Note que as crenças se confirmam ao aplicarmos a Regra de Bayes. $\square$

(b) Esse jogo admite algum PBE com *pooling*?

Sugestão de resposta.
Sim, este jogo admite PBE com *pooling*. Vamos olhar para o caso em que ambos os tipos de trabalhadores escolhem fazer faculdade, ou seja $P(h|f) = P(\ell|f) = \frac{1}{2}$.

Para os trabalhadores não desviarem da escolha de fazer faculdade, a firma deve contratar um trabalhador se, e somente se, ele fez faculdade. Caso contrário, se a firma não contratar os trabalhadores com faculdade, então eles podem economizar o custo de se educar não fazendo faculdade. De forma semelhante, se a firma contratar trabalhadores sem faculdade, então eles podem economizar o custo de se educar e ainda ganharem o mesmo salário. Note que a firma não obtém prejuízo seguindo tal estratégia.

O problema dos trabalhadores é semelhante ao caso anterior, mas agora os trabalhadores do tipo ℓ escolhem fazer faculdade quando indiferentes.

Juntando ambas as estratégias, temos um PBE com *pooling* em que os trabalhadores decidem fazer faculdade e a firma decide contratar o trabalhador se, e somente se, ele fez faculdade. Note que as crenças se confirmam ao aplicarmos a Regra de Bayes. $\square$