Lista de Exercícios # 4 - Gabarito

1. Em um mercado de um bem homogêneo, há duas firmas $\{1, 2\}$ que produzem o bem com funções custo diferentes:

$$\begin{aligned} C_1(q) &= 2q, \\ C_2(q) &= 4q. \end{aligned}$$

Suponha nos itens (a) e (b) abaixo que a demanda inversa do mercado seja dada por $p(Q) = 10 - Q$.

(a) Quais as quantidades escolhidas pelas firmas no equilíbrio de Cournot? Qual o preço do bem no equilíbrio?

Sugestão de resposta.
O problema da firma 1 é:

$$\max_{q_1} \ (10 - q_1 - q_2)q_1 - 2q_1$$

Cuja condição de primeira ordem implica em

$$q_1(q_2) = 4 - \frac{q_2}{2} \tag{1}$$

O problema da firma 2 é:

$$\max_{q_2} \ (10 - q_1 - q_2)q_2 - 4q_2$$

Cuja condição de primeira ordem implica em

$$q_2(q_1) = 3 - \frac{q_1}{2} \tag{2}$$

De (1) e (2) temos

$$\begin{aligned} q_1^* &= q_1(q_2(q_1)) \\ &= 4 - \frac{1}{2}\left(3 - \frac{q_1^*}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{q_1^*}{4} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Substituindo o resultado anterior em (2)

$$q_2^* = 3 - \frac{1}{2} * \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$$

Substituindo as quantidades encontradas na demanda inversa

$$p^* = 10 - \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

□

(b) Suponha que as firmas entrem em conluio, ou seja, escolhem os planos de produção de forma a maximizar o lucro conjunto das firmas. Quais os planos de produção para as firmas 1 e 2 escolhidos?

Sugestão de resposta.
Note que nunca será ótimo para as firmas em conluio produzirem qualquer quantidade positiva na firma 2. Caso $q_2 > 0$, seria possível obter lucro conjunto maior transferindo esta produção para a firma 1, obtendo a mesma receita e um custo menor. Logo, o problema das firmas em conluio é

$$\max_{q_1} \; (10 - q_1)q_1 - 2q_1$$

Cuja condição de primeira ordem implica que $q_1^* = 4$. Assim, os planos de produção são $(q_1^c, q_2^c) = (4, 0)$ □

Suponha agora que a demanda inversa do mercado seja dada por $p(Q) = 5 - Q$.

(c) Qual o equilíbrio de Cournot nesse novo mercado?

Sugestão de resposta.
O problema da firma 1 é:

$$\max_{q_1} \; (5 - q_1 - q_2)q_1 - 2q_1$$

Cuja condição de primeira ordem implica em

$$q_1(q_2) = \frac{3 - q_2}{2} \tag{3}$$

O problema da firma 2 é:

$$\max_{q_2} \; (5 - q_1 - q_2)q_2 - 4q_2$$

Cuja condição de primeira ordem implica em

$$q_2(q_1) = \frac{1 - q_1}{2} \tag{4}$$

De (3) e (4) temos

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{q_1^*}{2}\right) \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Substituindo o resultado anterior em (4)

$$\begin{aligned} q_2^* &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_1^* \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como $q_2^* \leq 0$, não é interessante para a firma 2 concorrer à la Cournot. Então, vejamos o que acontece quando só a firma 1 produz

$$\max_{q_1} \quad (5 - q_1)q_1 - 2q_1$$

Cuja condição de primeira ordem implica que $q_1^* = \frac{3}{2}$ e substituindo este resultado na demanda inversa encontramos $p^* = \frac{7}{2}$.

Portanto, quando apenas a firma 1 atua no mercado, o preço praticado é menor do que o custo marginal da firma 2, não sendo interessante para ela entrar neste mercado. $\square$

2. Mostre que em qualquer equilíbrio de Nash do jogo de Bertrand com produtos homogêneos, com $N > 2$ firmas no mercado (todas com custo marginal constante c), todas as vendas ocorrem com preço igual ao custo marginal.

   Sugestão de resposta.
   A demanda para a firma i é dada por

$$q_i(p_i, p_{-i}) = \begin{cases} q(p_i), & \text{se } p_i < \min p_{-i} \\ \frac{1}{n} q(p_i), & \text{se } p_i = \min p_{-i} \\ 0, & \text{se } p_i > \min p_{-i} \end{cases}$$

   onde n é o número de firmas que fazem $p_j = \min p_{-i}$.

   Vamos mostrar que $p_1 = p_2 = \cdots = p_N = c$ é o único equilíbrio de Nash possível.

   Primeiro, note que, em equilíbrio, nenhuma firma escolhe cobrar menos do que o custo marginal. Caso contrário, a firma com menor preço, chamemo de firma k, teria prejuízo e $p_k \geq c$ seria um desvio lucrativo para ela.

   Agora, olhemos para os casos restantes.

   - $p_i^* > \min p_{-i}^* > c$
     Neste caso $\pi_i(p_i^*, p_{-i}^*) = 0$. Logo, a firma i teria desvio lucrativo escolhendo $p_i' = \min p_{-i}^* - \varepsilon$. Portanto, esse não pode ser um equilíbrio.
   - $p_i^* = \min p_{-i}^* > c$
     Neste caso $\pi_i(p_i^*, p_{-i}^*) = (p_i^* - c)\frac{1}{n}q(p_i^*) > 0$. A firma i poderia obter lucro maior escolhendo $p_i' = \min p_{-i}^* - \varepsilon$ de modo a capturar toda a demanda. Portanto, esse também não pode ser um equilíbrio.
   - $\min p_{-i}^* > p_i^* \geq c$
     Neste caso $\pi_i(p_i^*, p_{-i}^*) = (p_i^* - c)q(p_i^*) \geq 0$. Apesar de ter toda a demanda para si e lucro não-negativo, a firma i sempre pode aumentar seu preço em um valor ε pequeno o suficiente de modo que

$$\begin{aligned} \pi_i(p_i^* + \varepsilon, p_{-i}^*) &= (p_i^* + \varepsilon - c)q(p_i^* + \varepsilon) \\ &> (p_i^* - c)q(p_i^*) \\ &= \pi_i(p_i^*, p_{-i}^*) \end{aligned}$$

     Logo, esse também não pode ser um equilíbrio.

   Por simetria e pela arbitrariedade de i, resta o caso em que $p_1^* = p_2^* = \cdots = p_N^* = c$. Como argumentado anteriormente, nenhuma firma tem incentivo para baixar o preço. Além disso, se alguma firma escolhesse preço maior, ela também obteria lucro nulo. Como não há desvios lucrativos, logo esse é um equilíbrio de Nash. □

3. A partir do jogo na forma normal abaixo, responda:

		Jogador 2		
		Esq.	Meio	Direita
Jogador 1	Cima	3,0	0,-3	0,-4
	Baixo	2,4	4,5	-1,8

(a) Verifique que nehuma estratégia pura domina estritamente outra.

Sugestão de resposta.
Para o Jogador 1:

$$\begin{aligned} u_1(\text{Cima}, \text{Esquerda}) &> u_1(\text{Baixo}, \text{Esquerda}) \\ u_1(\text{Cima}, \text{Meio}) &< u_1(\text{Baixo}, \text{Meio}) \\ u_1(\text{Cima}, \text{Direita}) &> u_1(\text{Baixo}, \text{Direita}) \end{aligned}$$

Para o Jogador 2:

$$\begin{aligned} u_2(\text{Esquerda}, \text{Cima}) > u_2(\text{Meio}, \text{Cima}) > u_2(\text{Direita}, \text{Cima}) \\ u_2(\text{Esquerda}, \text{Baixo}) < u_2(\text{Meio}, \text{Baixo}) < u_2(\text{Direita}, \text{Baixo}) \end{aligned}$$

Logo, nenhuma estratégia pura domina estritamente outra. □

(b) Mostre que uma estratégia pura é dominada estritamente por uma estratégia mista.

Sugestão de resposta.
Temos que, para o Jogador 2, qualquer estratégia mista do tipo $p\text{Esq.}+(1-p)\text{Dir.}$ em que $p \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ domina estritamente Meio. De fato,

$$\begin{aligned} u_2(p\text{Esq.} + (1-p)\text{Dir.}, \text{Cima}) &= 0p - 4(1-p) \\ &= 4p - 4 \\ &> -3 \\ &= u_2(\text{Meio}, \text{Cima}) \\ u_2(p\text{Esq.} + (1-p)\text{Dir.}, \text{Baixo}) &= 4p + 8(1-p) \\ &= 8 - 4p \\ &> 5 \\ &= u_2(\text{Meio}, \text{Baixo}) \end{aligned}$$

□

(c) Quais perfis de estratégias sobrevivem ao processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas (incluindo a possibilidade de randomização)? Esses perfis constituem Equilíbrios de Nash?

Sugestão de resposta.
EIEED:

i. Pelo item anterior podemos eliminar Meio. Além disso, toda estratégia mista do Jogador 2 que joga Meio com probabilidade positiva também é estritamente dominada. Para ver isso, basta notar que para qualquer $q \in (0, 1]$ e $p \in [0, 1]$ temos, para todo s_1,

$$u_2\left((1 - \frac{q}{2} - p)\text{Esq.} + (\frac{q}{2} + p)\text{Dir.}, s_1\right) > u_2\left((1 - q - p)\text{Esq.} + q\text{Meio} + p\text{Dir.}, s_1\right)$$

ii. Agora, Cima domina estritamente toda estratégia em que Baixo é jogada com probabilidade positiva. Isso acontece porque o payoff de qualquer estratégia mista não-degenerada será uma combinação convexa dos payoffs das estratégias puras.

iii. Finalmente, Esquerda domina estritamente toda estratégia em que Direita é jogada com probabilidade positiva.

Sobrevivem ao EIEED Cima para o Jogador 1 e Esquerda para o Jogador 2, as quais conjuntamente constituem um equilíbrio de Nash. □

4. Encontre os Equilíbrios de Nash em estratégias mistas do jogo na forma normal abaixo:

		Jogador 2	
		Esq.	Direita
Jogador 1	Cima	2,1	0,2
	Baixo	1,2	3,0

Sugestão de resposta.
Sejam p a probabilidade que o Jogador 1 atribui a jogar Cima e q a probabilidade que o Jogador 2 atribui a jogar Esquerda.

Primeiro, note que nenhuma estratégia pura é estritamente dominada. Logo, em um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, o Jogador 1 escolherá p de modo a deixar o Jogador 2 indiferente entre jogar Esquerda e Direita, e o Jogador 2 escolherá q de modo a deixar o Jogador 1 indiferente entre Cima e Baixo. Ou seja,

$$\begin{aligned} p^* + 2(1-p^*) = 2p^* + 0(1-p^*) &\iff 2 - p^* = 2p^* \\ &\iff p^* = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2q^* + 0(1-q^*) = 1q^* + 3(1-q^*) &\iff 2q^* = 3 - 2q^* \\ &\iff q^* = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Logo, o equilíbrio de Nash em estratégias mistas é

$$\left(\frac{2}{3}\text{Cima} + \frac{1}{3}\text{Baixo}, \frac{3}{4}\text{Esq.} + \frac{1}{4}\text{Dir.}\right)$$

□