LISTA DE EXERCÍCIOS # 3 - GABARITO

1. Suponha que um monopolista de um produto homogêneo tem custo marginal constante de produção igual a 1 e pode vender seu produto em dois mercados. No primeiro mercado a demanda é dada por $q_1 = 2 - p_1$ e no segundo mercado a demanda é dada por $q_2 = 4 - p_2$.

   (a) Suponha primeiro que a arbitragem de preços pelos consumidores é impossível e o monopolista pode discriminar preços entre os dois mercados. Calcule os preços, as quantidades e os lucros do monopolista em cada mercado.

   Sugestão de resposta.
   Neste caso, o problema do monopolista é

$$\begin{aligned} &\max_{p_1,p_2} \; p_1 q_1(p_1) + p_2 q_2(p_2) - 1q_1(p_1) - 1q_2(p_2) \\ \equiv &\max_{f,p} \; (p_1 - 1)(2 - p_1) + (p_2 - 1)(4 - p_2) \end{aligned}$$

   Resolvendo o problema acima encontramos $p_1^* = \frac{3}{2}$ e $p_2^* = \frac{5}{2}$.
   Substituindo tais preços nas demandas encontramos $q_1^* = \frac{1}{2}$ e $q_2^* = \frac{3}{2}$.
   Substituindo preços e quantidades na função lucro de cada mercado encontramos $\pi_1 = \frac{1}{4}$ e $\pi_2 = \frac{9}{4}$, logo o lucro total do monopolista é $\pi = \frac{5}{2}$. □

   (b) Suponha agora que os consumidores podem arbitrar preços entre os mercados de modo que o monopolista só pode praticar o mesmo preço nos dois mercados. Calcule novamente o preço, as quantidades e os lucros do monopolista em cada mercado.
   (DICA: Atente para o fato de que há a possibilidade de exclusão de algum mercado por conta do preço de equilíbrio. Logo monte o problema supondo que ambos os mercados são atendidos e caso um mercado seja excluído refaça o cálculo ótimo para atendimento apenas do outro mercado)

   Sugestão de resposta.
   Com os consumidores podendo arbitrar entre os mercados, o monopolista passa a poder cobrar somente um preço para ambos os mercados, ou seja, seu problema se torna

$$\begin{aligned} &\max_{p} \; pq_1(p) + pq_2(p) - 1q_1(p) - 1q_2(p) \\ \equiv &\max_{p} \; (p - 1)(6 - 2p) \end{aligned}$$

Resolvendo o problema acima encontramos $p^* = 2$. Note que a este preço vale $q_1(2) = 0$ e $q_2(2) = 2$, ou seja, o mercado 1 será excluído pelo monopolista. Assim, se o monopolista excluir o mercado 1 logo de início, seu problema se torna

$$\max_p \ (p-1)(4-p)$$

Resolvendo o problema acima encontramos $p^* = \frac{5}{2}$, o que implica que $q_2^* = \frac{3}{2}$. Se o monopolista formulasse seu problema de modo a vender para ambos os mercados, obteria um lucro de $\pi_{12} = 2$. Excluindo o mercado 1, o monopolista obtém um lucro de $\pi_2 = \frac{9}{5}$. Como $\pi_2 > \pi_{12}$, é ótimo para o monopolista vender apenas para o mercado 2. □

(c) Calcule o valor do excedente total gerado nas soluções de (a) e (b). Em qual delas o bem-estar é maior?

Sugestão de resposta.
No item (a):

$$\begin{aligned} EC_1 &= \frac{(2-\frac{3}{2})\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} \\ \pi_1 &= \frac{1}{4} \\ EC_2 &= \frac{(4-\frac{5}{2})\frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{8} \\ \pi_2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Resultando em um excedente total de

$$ET_a = EC_1 + EC_2 + \pi_1 + \pi_2 = \frac{15}{4}$$

No item (b):

$$ET_b = EC_2 + \pi_2 = \frac{27}{8}$$

Como $ET_a > ET_b$, é melhor para a sociedade permitir que o monopolista discrimine entre mercados. □

2. Suponha que uma empresa aérea é a única a oferecer determinada rota. Temos dois tipos de passageiros: *business*, que representam uma fração π do total de passageiros, e os turistas, que são o restante dos consumidores.

   Suponha ainda que os passageiros *business* tem função de utilidade $u_b = \theta_b q_b - p_b$ e os turistas tem função de utilidade $u_t = \theta_t q_t - p_t$ em que $\{q_i, p_i\}$; $i = \{b, t\}$ são a qualidade do serviço prestado pela empresa e os valores pagos, respectivamente. O custo de oferecer um serviço de qualidade q para cada passageiro é $c(q) = q^2$.[1] Por fim, $\theta_b > \theta_t$.

   (a) Suponha que a empresa consiga identificar exatamente cada tipo de passageiro. Qual o tipo de discriminação nesse caso? Quais as quantidades e preços de equilíbrio?

   Sugestão de resposta.
   Como a empresa conhece a disposição a pagar de cada consumidor, então temos o caso de discriminação de preços de 1º grau.
   Para passageiros do tipo $i = \{b, t\}$, o problema da empresa é

$$\begin{aligned} &\max_{q_i, p_i} \; p_i - q_i^2 \\ &\quad s.a. \;\; \theta_i q_i - p_i \geq 0 \\ \equiv &\max_{q_i} \; \theta_i q_i - q_i^2 \qquad \text{(A restrição deve valer com igualdade)} \end{aligned}$$

   Resolvendo o problema acima encontramos $q_i^* = \frac{\theta_i}{2}$ e $p_i^* = \frac{\theta_i^2}{2}$. □

   (b) Suponha que a empresa não consiga identificar qual o tipo de cada passageiro. Monte o problema de maximização de lucro escrevendo as restrições de incentivo e restrições de participação e encontre os preços e quantidades de equilíbrio. Prove que a restrição de participação do passageiro *business* pode ser ignorada.

   Sugestão de resposta.
   O problema da empresa agora é

$$\begin{aligned} \max_{q_i, p_i} \;& \pi(p_b - q_b^2) + (1-\pi)(p_t - q_t^2) \\ s.a. \;& \theta_b q_b - p_b \geq 0 \quad (RP_b) \\ & \theta_t q_t - p_t \geq 0 \quad (RP_t) \\ & \theta_b q_b - p_b \geq \theta_b q_t - p_t \quad (CI_b) \\ & \theta_t q_t - p_t \geq \theta_t q_b - p_b \quad (CI_t) \end{aligned}$$

[1] Ou seja, se n passageiros recebem serviços de qualidade $q_1, q_2, \ldots, q_n$ o custo para a firma é $q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2$.

Note que podemos ignorar a restrição de participação dos passageiros business, pois

$$\begin{aligned}
\theta_b q_b - p_b &\geq \theta_b q_t - p_t \quad (CI_b) \\
&> \theta_t q_t - p_t \quad (\theta_b > \theta_t) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Agora, supondo que a restrição de compatibilidade de incentivos dos turistas não é ativa, montamos o Lagrangeano

$$L = \pi(p_b - q_b^2) + (1-\pi)(p_t - q_t^2) + \lambda_{RP_t}(\theta_t q_t - p_t) + \lambda_{CI_b}(\theta_b q_b - p_b - \theta_b q_t - p_t)$$

Cujas condições de primeira ordem são

$$\pi = \lambda_{CI_b} \tag{1}$$

$$(1-\pi) - \lambda_{RP_t} + \lambda_{CI_b} = 0 \tag{2}$$

$$-2\pi q_b^* + \theta_b \lambda_{CI_b} = 0 \tag{3}$$

$$-2(1-\pi) q_t^* + \lambda_{RP_t}\theta_t - \lambda_{CI_b}\theta_b = 0 \tag{4}$$

De (1) e (2), temos

$$(1-\pi) - \lambda_{RP_t} - \pi = 0 \implies \lambda_{RP_t} = 1 \tag{5}$$

Como $\lambda_{RP_t} = 1 > 0$ e $\lambda_{CI_b} = \pi > 0$, tanto RP_t quanto CI_b são ativas, ou seja, valem com igualdade.
De (1) e (3), temos

$$-2\pi q_b^* + \theta_b \pi = 0 \implies q_b^* = \frac{\theta_b}{2}$$

De (1), (4) e (5), temos

$$-2(1-\pi) q_t^* + \theta_t - \pi\theta_b = 0 \implies q_t^* = \frac{\theta_t - \pi\theta_b}{2(1-\pi)}$$

Como RP_t deve valer com igualdade

$$p_t^* = \theta_t q_t^* = \frac{\theta_t^2 - \pi\theta_t\theta_b}{2(1-\pi)}$$

Como CI_b deve valer com igualdade

$$\begin{aligned}
p_b^* &= \theta_b(q_b^* - q_t^*) + p_t^* \\
&= \frac{\theta_b^2 - (1+\pi)\theta_t\theta_b + \theta_t^2}{2(1-\pi)}
\end{aligned}$$

Resta checar se vale CI_t.

Como $p_t^* = \theta_t q_t^*$, precisamos mostrar que $\theta_t q_b^* - p_b^* \leq 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\theta_t q_b^* - p_b^* &= \frac{\theta_t \theta_b}{2} - \left(\frac{\theta_b^2 - (1+\pi)\theta_t\theta_b + \theta_t^2}{2(1-\pi)} \right) \\
&= \frac{-\theta_b^2 + 2\theta_t\theta_b - \theta_t^2}{2(1-\pi)} \\
&= -\frac{(\theta_b - \theta_t)^2}{2(1-\pi)} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

$\square$

3. No jogo na forma normal abaixo,

		Jogador 2		
		Esq.	Centro	Direita
	Cima	1,1	2,0	4,2
Jogador 1	Meio	1,2	3,4	2,3
	Baixo	0,2	1,3	3,0

(a) Quais perfis de estratégias sobrevivem ao processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas?

Sugestão de resposta.
Para o Jogador 1 sobrevivem Cima e Meio, e para o Jogador 2 sobrevivem Centro e Direita. □

(b) Quais perfis de estratégias são Equilíbrios de Nash?

Sugestão de resposta.
Há dois Equilíbrios de Nash em estratégias puras: $(Meio, Centro)$ e $(Cima, Direita)$. □

4. Em um jogo na forma normal,

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador 1	A	1,3	4,5	5,2
	B	3,4	2,3	3,1
	C	2,3	3,2	2,1

(a) Quais estratégias sobrevivem ao processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas?

Sugestão de resposta.
Sobrevivem {A,B,C} para o Jogador 1 e {A,B} para o Jogador 2. □

(b) Qual o conjunto de estratégias racionalizáveis?

Sugestão de resposta.
São racionalizáveis {A,B} para o Jogador 1 e {A,B} para o Jogador 2. □

(c) Quais perfis de estratégias constituem Equilíbrios de Nash do jogo?

Sugestão de resposta.
Há dois Equilíbrios de Nash em estratégias puras: (A, B) e (B, A).
Há mais um Equilíbrio de Nash em estratégias mistas: $\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)$. □

(d) Algum perfil de EN encontrado em (c) possui estratégias eliminadas em (a) ou (b)? Esse resultado é uma coincidência? Explique

Sugestão de resposta.
Nenhum Equilíbrio de Nash (EN) possui estratégias eliminadas em (a) ou (b). Isso ocorre porque é necessário que uma estratégia seja melhor resposta para que ela faça parte de um EN, logo deve ser racionalizável. Além disso, uma estratégia estritamente dominada jamais poderá ser uma melhor resposta, logo, se uma estratégia compõe um EN, não pode ser elimianda pelo processo de EIEED. □

.

5. No jogo na forma normal abaixo, responda:

		Jogador 2			
		E	M	D	S
	T	1,1	3,2	5,1	3,1
Jogador 1	C	2,4	1,3	4,3	2,2
	B	1,-1	2,-1	4,0	1,-2

(a) Encontre o conjunto de estratégias que sobrevive ao processo de Eliminação Iterada de Estratégias **Estritamente** Dominadas.

Sugestão de resposta.
Sobrevivem {T,C,B} para o Jogador 1 e {E,M,D} para o Jogador 2. □

(b) Encontre o conjunto de estratégias que sobrevive ao processo de Eliminação Iterada de Estratégias **Fracamente** Dominadas.

Sugestão de resposta.
Sobrevivem {T,C} para o Jogador 1 e {E,M} para o Jogador 2. □

(c) Encontre todos os perfis de Equilíbrio de Nash.

Sugestão de resposta.
Há dois Equilíbrios de Nash em estratégias puras: (T, M) e (C, E).
Há mais um Equilíbrio de Nash em estratégias mistas: $\left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}C, \frac{2}{3}E + \frac{1}{3}M\right)$. □

6. Os jogadores 1 e 2 barganham sobre como dividir um real. Os dois jogadores submetem simultaneamente frações para a divisão $s_1, s_2 \in [0,1]$. Se $s_1 + s_2 \leq 1$, então ambos ficam com as frações que submeteram. Caso $s_1 + s_2 > 1$, ambos ficam com zero.

   (a) Represente o jogo na forma normal.

   Sugestão de resposta.

$$G = \{[0,1], [0,1], u_1, u_2\}$$

   onde para $i = 1, 2$

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} s_i, & \text{se } s_i + s_{-i} \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\square$

   (b) Quais perfis de estratégias constituem Equilíbrios de Nash desse jogo?

   Sugestão de resposta.
   Para uma dada estratégia adversária s_{-i}, temos que

   - Se $s_i + s_{-i} < 1$, o jogador i poderia obter payoff maior jogando qualquer s_i' tal que $s_i' > s_i$ e $s_i' + s_{-i} \leq 1$.
   - Se $s_i + s_{-i} > 1$, o jogador i poderia obter payoff maior jogando qualquer $s_i' > 0$ tal que $s_i' + s_{-i} \leq 1$.
   - Se $s_{-i} = 1$, o jogador i é indiferente entre todas suas possíveis estratégias.

   Logo, as funções melhor resposta são

$$\begin{cases} s_1(s_2) = 1 - s_2 \\ s_2(s_1) = 1 - s_1 \end{cases} \implies s_1^* + s_2^* = 1$$

   Portanto, os EN são todos os pares (s_1, s_2) tais que $s_1 + s_2 = 1$. $\square$