Microeconomia II — Prof. Marcelo Sant'Anna — Monitor: Bruno Ogava

2º Semestre 2019 — FGV EPGE

Lista de Exercícios # 2 - Gabarito

1. Tom Hanks possui um peixe hoje. Amanhã existem dois possíveis eventos. No primeiro, que ocorre com probabilidade π, Tom terá 2 peixes e no segundo, que ocorre com probabilidade complementar, um peixe. A função utilidade de Tom é dada por:

$$u(c_0, c_{11}, c_{12}) = \log(c_0) + \pi \log(c_{11}) + (1 - \pi) \log(c_{12}),$$

onde c_0 é o seu consumo hoje, c_{11} seu consumo amanhã em caso de evento 1, e c_{12} seu consumo amanhã em caso de evento 2. Não há a possibilidade de armazenamento de peixes e Tom vive sozinho na ilha (Wilson se foi). Então o Sr. Hanks estabelece um mercado financeiro. Neste mercado são transacionados dois ativos. Um paga (1;0), isto é, uma unidade de peixe no evento 1 e 0 no evento 2. O outro paga (0;1). Tom Hanks toma como dados os preços dos ativos e decide o quanto ele compra de cada.

(a) Encontre os preços e alocação de equilíbrio.

Sugestão de resposta.
O problema de Tom Hanks é

$$\max_{c_0, C_{11}, c_{12}} \quad \log(c_0) + \pi \log(c_{11}) + (1 - \pi) \log(c_{12})$$
$$s.a. \quad p_0 c_0 + p_{11} c_{11} + p_{12} c_{12} = p_0 + 2p_{11} + p_{12}$$

Cujas condições de primeira ordem são

$$\frac{1}{c_0} = \lambda p_0 \tag{1}$$
$$\frac{\pi}{c_{11}} = \lambda p_{11} \tag{2}$$
$$\frac{(1-\pi)}{c_{12}} = \lambda p_{12} \tag{3}$$

Normalizando para p_0 e substituindo (1) em (2) e (3), obtemos

$$p_{11} = \frac{\pi C_0}{c_{11}}$$
$$p_{12} = \frac{(1-\pi) c_0}{c_{12}}$$

Além disso, como Tom Hanks é o único agente desta economia, por *market clearing*, devemos ter

$$\begin{cases} c_0 = e_0 = 1 \\ c_{11} = e_{11} = 2 \\ c_{12} = e_{12} = 1 \end{cases}$$

Logo, a alocação de Equilíbrio Walrasiano desta economia é

$$(c_0^*, c_{11}^*, c_{12}^*) = (1, 2, 1)$$

e um vetor de preços de Equilíbrio Walrasiano deve ser proporcional a

$$(p_0, p_{11}, p_{12}) = \left(1, \frac{\pi}{2}, 1 - \pi\right)$$

□

(b) Qual deve ser o preço do ativo livre de risco?

Sugestão de resposta. Como possuir uma unidade do ativo livre de risco equivale a possuir uma unidade de cada bem contingente, então seu preço, p_f, deve ser tal que

$$\begin{aligned} p_f^* &= p_{11}^* + p_{12}^* \\ &= \frac{\pi}{2} + 1 - \pi \\ &= 1 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

□

2. Em uma ilha, um náufrago vive por dois períodos, hoje e amanhã. Só há milho para consumo na ilha. O milho pode ser consumido hoje ou cultivado. Cada grão de milho cultivado hoje gera $1 + g$ unidades de milho amanhã, com $g > 0$.

   O náufrago tem preferências pelo consumo hoje (x_1) e amanhã (x_2) de milho dadas por

$$u(x_1, x_2) = \log(x_1) + \beta \log(x_2),$$

   com $0 < \beta < 1/(1 + g)$.

   Suponha que hoje ele tenha dotação de uma unidade de milho hoje e nada amanhã. Suponha também que o cultivo de milho seja feito por uma firma competitiva.

   (a) Escreva o conjunto de possibilidades de produção. Desenhe o conjunto de possibilidades de consumo em um gráfico tendo milho hoje na abscissa e milho amanhã na ordenada.

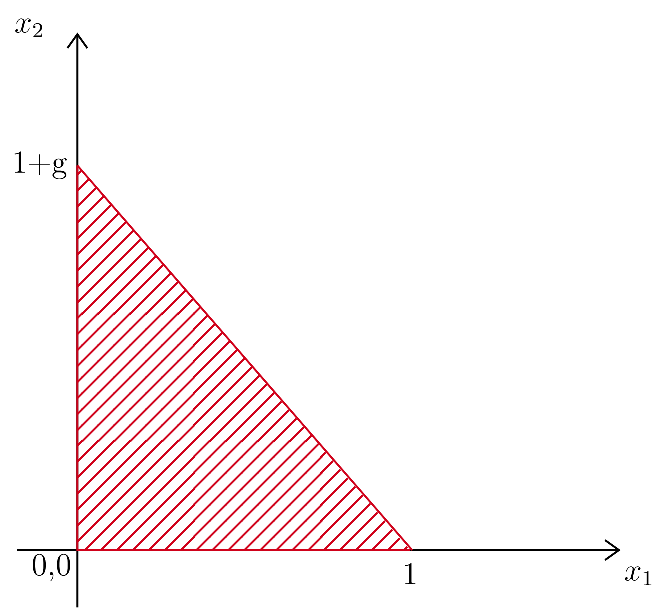
   Sugestão de resposta.
   O conjunto de possibilidades de produção é

$$Y = \{(-x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq (1 + g)x_1\}$$

   A fronteira de possibilidades de consumo é tal que

$$\begin{cases} x_1 = 1 + y_1 \\ x_2 = 0 + (1 + g)(-y_1) \end{cases} \implies x_2 = (1 + g)(1 - x_1)$$

   Graficamente



□

(b) Encontre a alocação e preços de Equilíbrio Walrasiano.

Sugestão de resposta.
Primeiro, note que, por argumento semelhante ao da questão 4-c da lista 1, pelo problema da firma devemos ter $p_1 = p_2(1+g)$ e $\pi(p_1, p_2) = 0$. A seguir, o problema do consumidor é

$$\max_{x_1, x_2} \ \log(x_1) + \beta \log(x_2)$$
$$s.a. \ \ p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1$$

Do qual obtemos as seguinte demandas Marshallianas

$$x_1(p, e) = \frac{1}{1+\beta}$$
$$x_2(p, e) = \frac{\beta}{1+\beta}\frac{p_1}{p_2}$$

Portanto, a alocação de Equilíbrio Walrasiano desta economia é tal que

$$((x_1^*, x_2^*), (y_1^*, y_2^*)) = \left(\left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{\beta(1+g)}{1+\beta}\right), \left(\frac{-\beta}{1+\beta}, \frac{\beta(1+g)}{1+\beta}\right)\right)$$

e um vetor de preços de Equilíbrio Walrasiano será qualquer vetor de preços tal que $p_1 = p_2(1+g)$. □

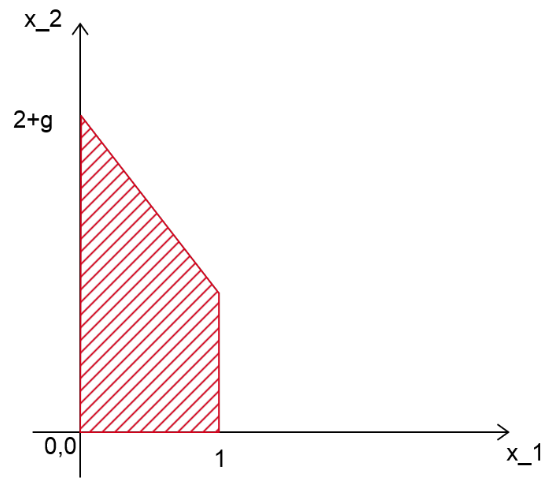
(c) Agora suponha que sua dotação inicial é de uma unidade de milho hoje e uma unidade amanhã.

i. Desenhe novamente o conjunto de possibilidades de consumo.

Sugestão de resposta.
A fronteira de possibilidades de consumo passa a ser

$$\begin{cases} x_1 = 1 + y_1 \\ x_2 = 1 + (1+g)(-y_1) \end{cases} \implies \begin{matrix} x_2 = (2+g) - (1+g)x_1 \\ (x_1 \in [0,1]) \end{matrix}$$

Graficamente



$\square$

ii. Verifique que no sistema preços encontrados anteriormente o consumo de milho hoje é maior do que 1 (dica: use as restrições sobre g e β dadas no problema). Esse consumo pode ser parte de uma alocação factível?

Sugestão de resposta.
Como a renda do consumidor muda, as demandas Marshallianas passam a ser

$$x_1(p,e) = \frac{1}{1+\beta}\frac{p_1+p_2}{p_1}$$
$$x_2(p,e) = \frac{\beta}{1+\beta}\frac{p_1+p_2}{p_2}$$

Com o sistema de preços encontrado anteriormente temos que

$$x_1(p,e) = \frac{1}{1+\beta}\left(1+\frac{1}{1+g}\right) > 1$$

O qual não é factível visto que não podemos trazer milho de amanhã para hoje. $\square$

iii. Encontre uma alocação e preços de Equilíbrio Walrasiano para essa economia.

Sugestão de resposta.
Trivialmente, o consumidor não estará maximizando sua utilidade em um ponto interior do conjunto de possibilidades de consumo. Vejamos os pontos na fronteira.
Na fronteira devemos ter $x_2 = 1 + (1+g)(1-x_1)$, para $x_1 \in [0,1]$, logo

$$u(x_1,x_2) = \log(x_1) + \beta\log(1+(1+g)(1-x_1))$$

Cuja derivada em relação a x_1 é

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \frac{\beta(1+g)}{1+(1+g)(1-x_1)}$$

Note que $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$, quando $\beta(1+g)x_1 < 1+(1+g)(1-x_1)$. Como $\beta(1+g) < 1$, temos que a função utilidade, nos pontos de fronteira, será crescente para todo $x_1 \in (0,1)$. Logo, o consumidor maximizará sua utilidade quando $x_1^* = 1$ e $x_2^* = 1$. Portanto, em equilíbrio

$$((x_1^*, x_2^*), (y_1^*, y_2^*)) = ((1,1), (0,0))$$

para qualquer vetor de preços tal que $p_1 \geq (1+g)p_2$, ou seja, quando a firma não produz. $\square$

3. Um condomínio de 1000 residências planeja a instalação de uma rede própria de internet, ao invés de ter cada residência contratando seu próprio serviço. A demanda inversa de cada residência é

$$p(g) = 100 - 5g,$$

em que g é a banda em GB. Na empresa consultada pelo síndico a instalação do serviço custaria R$ 100.000,00 e o preço da banda R$ 40,00 por GB contratado.[1]

O síndico precisa escolher qual velocidade contratar para o condomínio e quanto cobrar de cada residência.

(a) Nesse item, vamos calcular o nível eficiente de g.

i. Escreva a função $S(g)$ que retorna o bem-estar agregado das 1000 residências dada uma velocidade g escolhida pelo síndico.[2]

Sugestão de resposta.
O bem-estar de cada residência, individualmente, para uma dada velocidade g, é tal que

$$\begin{aligned} s(g) &= \int_0^g (100 - 5q)dq \\ &= 100g - \frac{5g^2}{2} \end{aligned}$$

Como temos 1.000 residências, o bem-estar agregado é dado por

$$\begin{aligned} S(g) &= 1.000s(g) \\ &= 100.000g - 2.500g^2 \end{aligned}$$

□

ii. Escreva a função $C(g)$ que retorna o custo para o condomínio do estabelecimento de um serviço com velocidade de g para cada residência.

Sugestão de resposta.
Como é prometida uma velocidade de g para cada residência, o custo do condomínio é dado por

$$\begin{aligned} C(g) &= 100.000 + 40 \times 1.000g \\ &= 100.000 + 40.000g \end{aligned}$$

□

[1] O síndico precisa garantir que todas as residências possam sempre usar a banda prometida. Ou seja, se a cada residência é prometido g GB, o síndico precisa contratar para o condomínio $1000 \times g$ GB.

[2] Observe que essa função irá ignorar por enquanto o preço que os moradores eventualmente precisarão pagar pelo serviço.

iii. Qual a velocidade g eficiente, ou seja, que maximiza o bem-estar agregado $S(g) - C(g)$?

Sugestão de resposta.
A velocidade eficiente, g^e, é a que resolve

$$\begin{aligned} \max_g \quad S(g) - C(g) &\equiv \max_g \quad 100.000g - 2.500g^2 - (100.000 + 40.000g) \\ &\equiv \max_g \quad -2.500g^2 + 60.000g - 100.00 \end{aligned}$$

Da qual obtemos a seguinte condição de primeira ordem

$$-5.000g^e + 60.000 = 0 \implies g^e = 12$$

□

(b) Suponha que o síndico cobre uma tarifa por velocidade contratada apenas e deixe os moradores escolherem livremente a velocidade desejada.

i. Qual tarifa implementa a escolha ótima de g encontrada acima? A essa tarifa o condomínio tem lucro?

Sugestão de resposta.
Com a cobrança de uma tarifa t por velocidade contratada, a função de bem-estar de cada residência se torna $s(g) = 100g - \frac{5g^2}{2} - tg$. Logo, o problema de cada residência é

$$\max_{g} \quad -\frac{5g^2}{2} + (100 - t)g$$

Da qual obtemos a seguinte condição de primeira ordem

$$5g = 100 - t \implies g(t) = 20 - \frac{t}{5}$$

Como queremos que cada residência contrate $g^e = 12$, temos que a tarifa, t^e, que implementa a velocidade eficiente é a que resolve

$$20 - \frac{t^2}{5} = 12 \implies t^e = 40$$

Como sabemos qual velocidade os moradores escolherão, dada uma tarifa t, o lucro do condomínio é dado por

$$\pi(t) := 1.000\left(20 - \frac{t}{5}\right)t - 40.000\left(20 - \frac{t}{5}\right) - 100.000$$

Logo, $\pi(t^e) = \pi(40) = -100.000$. Portanto, cobrando $t^e = 40$, o condomínio toma todo o custo de instalação como prejuízo. □

ii. Qual tarifa por velocidade maximiza o lucro do condomínio? A esse preço o condomínio tem lucro?

Sugestão de resposta.
O problema do condomínio é

$$\max_{t} \quad (1.000t - 40.000)\left(20 - \frac{t}{5}\right) - 100.000$$

Cuja condição de primeira ordem é

$$20.000 - 400t^m + 8.000 = 0 \implies t^m = 70$$

Portanto, cobrando $t^m = 70$, o condomínio tem lucro de $\pi(70) = 80.000$. □

(c) Suponha agora que o síndico pode cobrar uma tarifa em duas partes das residências. Uma parte fixa, independente da velocidade contratada, e uma parte variável linear na velocidade: $T(g) = f + pg$.

i. Qual tarifa em duas partes (f, g) que maximiza o lucro do condomínio?

Sugestão de resposta.
O problema do condomínio agora é

$$\begin{aligned}
&\max_{f,p} \quad 1.000(f + pg(p)) - 100.000 - 40 \times 1.000 g(p) \\
&\qquad s.a. \quad s(g(p)) - f \geq 0 \\
\equiv &\max_{f,p} \quad (1.000p - 40.000)\left(20 - \frac{p}{5}\right) + 1.000f - 100.000 \\
&\qquad s.a. \quad -\frac{5}{2}\left(20 - \frac{p}{5}\right)^2 + (100 - p)\left(20 - \frac{p}{5}\right) - f \geq 0
\end{aligned}$$

Note que a função objetivo é estritamente crescente em f, logo a restrição deve valer com igualdade. Substituindo a restrição na função objetivo, o problema se torna

$$\max_{p} \quad -2.500\left(20 - \frac{p}{5}\right)^2 + 60.000\left(20 - \frac{p}{5}\right) - 100.000$$

Cuja condição de primeira ordem é

$$\begin{aligned}
1.000\left(20 - \frac{p^*}{5}\right) - 12.000 &= 0 \\
20 - \frac{p^*}{5} &= 12 \\
p^* &= 40
\end{aligned}$$

Da restrição, temos

$$\begin{aligned}
f^* &= -\frac{5}{2}\left(20 - \frac{40}{5}\right)^2 + (100 - 40)\left(20 - \frac{40}{5}\right) \\
&= 360
\end{aligned}$$

Portanto, a tarifa em duas partes que maximiza o lucro do condomínio é

$$T(g) = 360 + 40g$$

$\square$

ii. Como a velocidade encontrada se compara com as quantidades encontradas em (a)? Explique a intuição desse resultado.

Sugestão de resposta.
Com a tarifa em duas partes, a velocidade contratada será $g(p^*) = g(40) = 12$, ou seja, a mesma do caso eficiente. Isso acontece porque os moradores escolhem a velocidade a contratar com base no preço por unidade. Como o preço por unidade é o mesmo do que no caso com a tarifa que implementa a velocidade eficiente, então a velocidade contratada com a tarifa em duas partes será a eficiente. $\square$

iii. Como se compara o lucro do condomínio? Explique a intuição desse resultado.

Sugestão de resposta.
Com a tarifa em duas partes, o lucro do condomínio é

$$\begin{aligned}
\pi(360, 40) &= 1.000(360 + 40g(40)) - 100.000 - 40 \times 1.000g(40) \\
&= 360.000 - 100.000 \\
&= 260.000
\end{aligned}$$

Com a possibilidade de cobrar uma tarifa em duas partes, o condomínio faz uso do preço por velocidade (p) para implementar a velocidade contratada eficiente e utiliza a parte fixa da tarifa (f) para capturar o bem-estar que cada residência ganharia. Assim, o lucro do condomínio passa a ser a soma do bem-estar que as residências ganhariam menos o custo de instalação (custo fixo). $\square$

iv. Qual tarifa em duas partes maximiza o bem-estar das residências, sujeito a que o condomínio opere sem prejuízo?

Sugestão de resposta.
O problema passa a ser

$$\begin{aligned}
\max_{f,p} \quad & 1.000 \left(-\frac{5}{2} \left(20 - \frac{p}{5} \right)^2 + (100 - p) \left(20 - \frac{p}{5} \right) - f \right) \\
s.a. \quad & (1.000p - 40.000) \left(20 - \frac{p}{5} \right) + 1.000f - 100.000 \geq 0
\end{aligned}$$

Note que agora a função objetivo é estritamente decrescente em f, mas a restrição passa a ser estritamente crescente em f. Assim, a restrição será ativa, ou seja, valerá com igualdade. Podemos, então, reescrever a restrição como $f = 100 - (p - 40) \left(20 - \frac{p}{5} \right)$. Substituindo a nova restrição na função objetivo, o problema se torna

$$\max_{f,p} \quad 1.000 \left(-\frac{5}{2} \left(20 - \frac{p}{5} \right)^2 + 60 \left(20 - \frac{p}{5} \right) - 100 \right)$$

Cuja condição de primeira ordem é

$$20 - \frac{p^m}{5} - 12 = 0 \implies p^r = 40$$

Da restrição temos que $f^r = 100$. Agora o condomínio continua implementando a velocidade contratada eficiente, mas passa a usar a parte fixa da tarifa somente para cobrir os custos de instalação. $\square$