Lista de Exercícios # 1 - Gabarito

1. Para as economias de trocas puras abaixo, desenhe a Caixa de Edgeworth com algumas curvas de indiferença para os dois agentes e o conjunto de alocações Pareto Eficientes e encontre um Equilíbrio Walrasiano.

   (a) $u_a(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$,
   $u_b(x_1, x_2) = \log x_1 + \log x_2$,
   $(e_{a1}, e_{a2}) = (2, 1)$,
   $(e_{b1}, e_{b2}) = (1, 2)$.

   Eficiência de Pareto.
   Para encontrar as alocações Pareto Eficientes, primeiro vamos aplicar a seguinte transformação monotônica na função utilidade de "b"

$$\hat{u}_b(x_1, x_2) \coloneqq \exp u_b(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

   Agora note que, quando "b"consome qualquer quantidade positiva de ambos os bens, uma alocação só pode ser Pareto Eficiente se $x_{a1} = x_{a2}$. Caso contrário, podemos transferir a diferença do bem em excesso para "b", fazendo com que ele melhore sem prejudicar "a".

   Vejamos agora os casos em que "b"consome quantidade nula de apenas um dos bens. Sem perda de generalidade assuma que $x_{b1} = 0$ e $x_{b2} > 0$. Neste caso $x_{a1} = 3$ e $x_{a2} < 3$. Portanto, a transferência de $0 < \varepsilon < 3 - x_{a2}$ unidades do bem 1 para "b"o deixará melhor sem prejudicar "a". Logo, este caso não pode ser Pareto Eficiente.

   Além disso, como $((0, 0), (3, 3))$ e $((3, 3), (0, 0))$ são trivialmente Pareto Eficientes, então as alocações Pareto Eficientes serão as alocações factíveis em que $x_{a1} = x_{a2}$ □

   Equilíbrio Walrasiano.
   Resolvendo o problema do consumidor de "b"e definindo $p \coloneqq \frac{p_2}{p_1}$, encontramos as seguintes demandas Marshallianas

$$x_{b1}(p, e_b) = \frac{1}{2}(1 + 2p) \tag{1}$$

$$x_{b2}(p, e_b) = \frac{1}{2}\frac{(1 + 2p)}{p} \tag{2}$$

   Note que das condições de factibilidade temos

$$\begin{cases} x_{a1}(p, e_a) + x_{b1}(p, e_b) = 3 \\ x_{a2}(p, e_a) + x_{b2}(p, e_b) = 3 \end{cases} \tag{3}$$

Pelo Primeiro Teorema do Bem-Estar Social, sabemos que o Equilíbrio Walrasiano deverá atender a condição $x^*_{a1} = x^*_{a2}$. Logo, por (3), também sabemos que o Equilíbrio Walrasiano deverá atender a condição $x^*_{b1} = x^*_{b2}$. Desta condição e por (1) e (2) temos que a razão de preços de equilíbrio deve satisfazer[1]

$$\frac{1}{2}(1+2p^*) = \frac{1}{2}\frac{(1+2p^*)}{p^*} \implies p^* = 1$$

Substituindo p^* nas demandas Marshallianas de "b"e usando as condições de factibilidade, encontramos que a alocação de Equilíbrio Walrasiano será

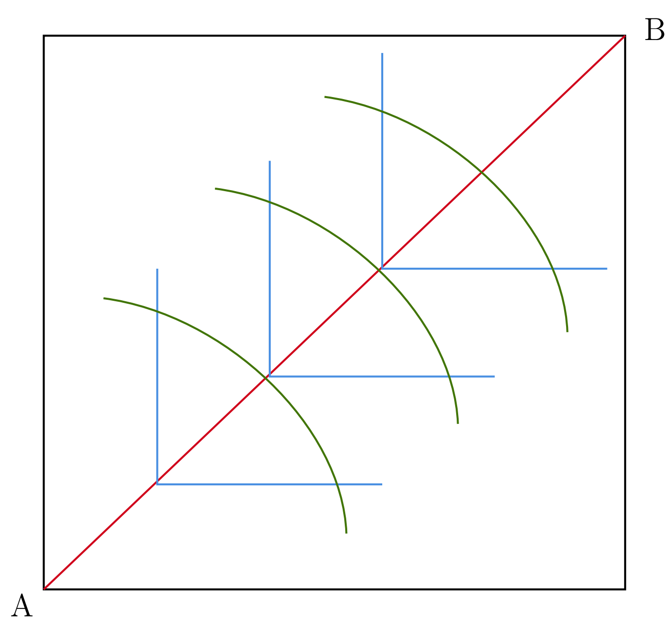
$$((x^*_{a1}, x^*_{a2}), (x^*_{b1}, x^*_{b2})) = \left(\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)$$

e um vetor de preços de Equilíbrio Walrasiano deve ser proporcional a

$$(p^*_1, p^*_2) = (1, 1)$$

$\square$

Caixa de Edgeworth.
Sejam a curva vermelha a curva de contrato desta economia, as curvas azuis exemplos de curvas de indiferença de "a"e as curvas verdes exemplos de curvas de indiferença de "b". A Caixa de Edgeworth desta economia será



$\square$

[1] Lembrando que $p^* > 0$.

(b) $u_a(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$,
$u_b(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$,
$(e_{a1}, e_{a2}) = (1, 1)$,
$(e_{b1}, e_{b2}) = (1, 1)$.

Eficiência de Pareto.
Note que

$$TMS^a_{12} = \frac{1}{2} \neq 2 = TMS^b_{12}$$

sendo ambas taxas marginais de substituição constantes. Portanto, não teremos alocações Pareto Eficientes no interior da Caixa de Edgeworth. Chequemos, então, as alocações nas fronteiras da Caixa de Edgeworth.

- $((0, 0), (2, 2))$ e $((2, 2), (0, 0))$
São trivialmente Pareto Eficientes.

- $((0, x_{a2}), (2, 2 - x_{a2}))$, com $0 < x_{a2} \leq 2$
Como "b"tem todas as unidades disponíveis do bem que mais valoriza, x_1, e sua utilidades é estritamente crescente em x_1, não há nenhuma troca possível que faça "a"alcançar um nível de utilidade maior sem prejudicar "b". Logo, tais alocações são Pareto Eficientes.

- $((x_{a1}, 2), (2 - x_{a1}, 0))$, com $0 < x_{a1} \leq 2$
Caso simétrico ao anterior.

- $((x_{a1}, 0), (2 - x_{a1}, 2))$, com $0 < x_{a1} \leq 2$
Para ver que há possíveis ganhos de troca neste caso, tome $\frac{1}{2} < \gamma < 2$ e $\varepsilon > 0$ tal que $x_{a1} - \gamma\varepsilon > 0$. Note que uma troca de $\gamma\varepsilon$ unidades de x_1 de "a"por ε unidades de x_2 de "b"fará com que ambos os indivíduos alcancem nível de utilidade maior. Portanto, as alocações nesta fronteira da Caixa de Edgeworth não podem ser Pareto Eficientes.

- $((2, x_{a2}), (0, 2 - x_{a2}))$, com $0 < x_{a2} \leq 2$
Caso simétrico ao anterior.

Assim, as alocações Pareto Eficientes serão tais que

i. $((0, x_{a2}), (2, 2 - x_{a2}))$, com $0 < x_{a2} \leq 2$
ii. $((x_{a1}, 2), (2 - x_{a1}, 0))$, com $0 < x_{a1} \leq 2$

$\square$

Equilíbrio Walrasiano.
Note que o Primeiro Teorema do Bem-Estar Social nos garante que podemos procurar o Equilíbrio Walrasiano entre as alocações Pareto Eficientes. Definindo $p := \frac{p_2}{p_1}$, vamos olhar para os dois possíveis casos de Eficiência de Pareto.

i. $x_{a1} = 0$ e $x_{b1} = 2$
As demandas Marshallianas para bens substitutos são tais que

$$\begin{cases} x_{a1}(p, e_a) = 0 & \text{se } p \leq 2 \\ x_{b1}(p, e_b) = 1 + p & \text{se } p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A condição de factibilidade para o bem 1 implica que

$$0 + (1 + p) = 2 \implies p = 1.$$

Note que $\frac{1}{2} \leq p \leq 2$.

ii. $x_{a2} = 2$ e $x_{b2} = 0$
As demandas Marshallianas para bens substitutos são tais que

$$\begin{cases} x_{a2}(p, e_a) = \frac{1+p}{p} & \text{se } p \leq 2 \\ x_{b2}(p, e_b) = 0 & \text{se } p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A condição de factibilidade para o bem 2 implica que

$$\frac{1 + p}{p} + 0 = 2 \implies p = 1.$$

Note que $\frac{1}{2} \leq p \leq 2$.

Portanto, como ambos os casos sustentam um Equilíbrio Walrasiano com uma mesma razão de preços, temos que a alocação de Equilíbrio Walrasiano será

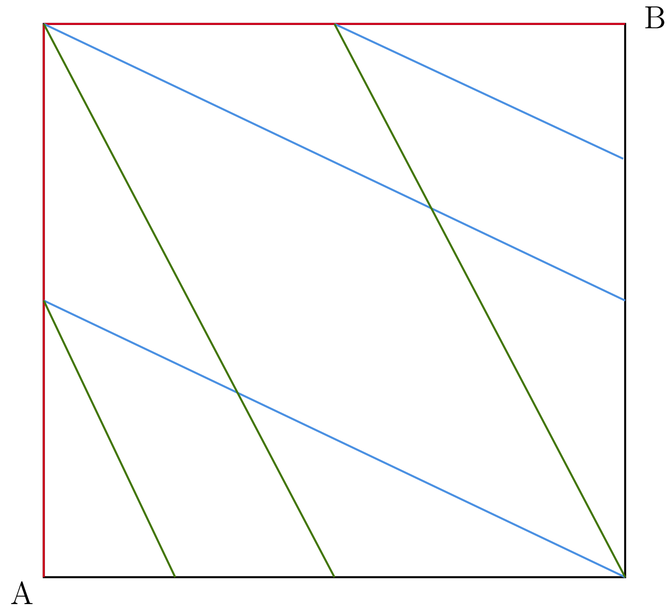
$$((x^*_{a1}, x^*_{a2}), (x^*_{b1}, x^*_{b2})) = ((0, 2), (2, 0))$$

e um vetor de preços de Equilíbrio Walrasiano deve ser proporcional a

$$(p^*_1, p^*_2) = (1, 1)$$

$\square$

Caixa de Edgeworth.
Sejam a curva vermelha a curva de contrato desta economia, as curvas azuis exemplos de curvas de indiferença de "a"e as curvas verdes exemplos de curvas de indiferença de "b". A Caixa de Edgeworth desta economia será


B
A

□

2. Em uma economia de trocas com N bens e I consumidores mostre que se para dado vetor de preços $p \gg 0$, os mercados de $N-1$ bens estão em equilíbrio, então todos os mercados estão em equilíbrio.

   Sugestão de resposta.
   Sejam n o índice que denota os bens e i o índice que denota os consumidores desta economia.

   Da restrição orçamentária temos que para cada consumidor i deve valer

$$\sum_{n=1}^{N} p_n x_{in}(p, pe_i) = \sum_{n=1}^{N} p_n e_{in} \tag{4}$$

   onde $p_n > 0$ para todo $n = 1, \ldots, N$, e_{in} representa a dotação inicial do bem n para o consumido i, x_{in} representa o consumo de i do bem n.

   Reescrevendo (4), obtemos

$$\sum_{n=1}^{N} p_n(x_{in}(p, pe_i) - e_{in}) = \sum_{n=1}^{N} p_n z_{in}(p) = 0 \tag{5}$$

   onde $z_{in}(p)$ representa o excesso de demanda do consumidor i pelo bem n dado o vetor de preços p.

   Como (5) vale para todo i, somando em i obtemos

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} p_n z_{in}(p) = 0$$
$$\sum_{n=1}^{N} p_n \sum_{i=1}^{I} z_{in}(p) = 0$$
$$\sum_{n=1}^{N} p_n z_n(p) = 0$$

   Note então que se, para um dado vetor de preços $p^* \gg 0$, temos $n = 1, \ldots, N-1$ mercados em equilíbrio (ou seja $z_n(p^*) = 0$ para $n = 1, \ldots, N-1$), então

$$\sum_{n=1}^{N-1} p_n^* z_n(p^*) + p_N^* z_N(p^*) = 0$$
$$\sum_{n=1}^{N-1} p_n^* 0 + p_N^* z_N(p^*) = 0$$
$$p_N^* z_N(p^*) = 0$$

   Como $p_N^* > 0$, então $z_N(p^*) = 0$. Ou seja, o N-ésimo mercado também estará em equilíbrio. $\square$

3. Em uma economia de trocas com dois agentes e dois bens, $(x^\star_{1a}, x^\star_{1b}, x^\star_{2a}, x^\star_{2b}) = (2,1,2,1)$ é uma alocação Pareto Eficiente. Sabemos ainda que a utilidade dos dois agentes é estritamente crescente e que:

$$\frac{\frac{\partial u^a(x^\star_{1a}, x^\star_{2a})}{\partial x_1}}{\frac{\partial u^a(x^\star_{1a}, x^\star_{2a})}{\partial x_2}} = 3.$$

Partindo-se de uma dotação inicial $\bar{e}_{1b} = 0.5$, qual deve ser a dotação inicial do bem 2 para o agente b, $\bar{e}_{2b}$, para que $x^\star$ seja alocação de Equilíbrio Walrasiano dessa economia?

Sugestão de resposta.
Note que, por $(x^\star_{1a}, x^\star_{1b}, x^\star_{2a}, x^\star_{2b}) = (2,1,2,1)$ ser um ponto no interior da Caixa de Edgeworth, para que x^* seja um Equilíbrio Walrasiano deve valer que

$$TMS^a_{12} = \frac{\frac{\partial u^a(x^\star_{1a}, x^\star_{2a})}{\partial x_1}}{\frac{\partial u^a(x^\star_{1a}, x^\star_{2a})}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \implies \frac{p_1}{p_2} = 3.$$

Então, das restrições orçamentárias, temos

$$\begin{cases} 3 * 2 + 2 = 3\bar{e}_{1a} + \bar{e}_{2a} \\ 3 * 1 + 1 = 3\bar{e}_{1b} + \bar{e}_{2b} \end{cases} \implies 3\bar{e}_{1a} + \bar{e}_{2a} = 6\bar{e}_{1b} + 2\bar{e}_{2b} \tag{6}$$

Além disso, das condições de factibilidade, temos

$$\begin{cases} \bar{e}_{1a} = 3 - \bar{e}_{1b} \\ \bar{e}_{2a} = 3 - \bar{e}_{2b} \end{cases} \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6) obtemos

$$\begin{aligned} 3(3 - \bar{e}_{1b}) + (3 - \bar{e}_{2b}) &= 6\bar{e}_{1b} + 2\bar{e}_{2b} \\ \bar{e}_{2b} &= 4 - 3\bar{e}_{1b} \end{aligned}$$

Logo, se $\bar{e}_{1b} = 0.5$, para que x^* seja um Equilíbrio Walrasiano devemos ter $\bar{e}_{2b} = 2.5$. $\square$

4. Em uma economia, há apenas dois bens: milho e bourbon. Milho pode ser transformado em bourbon com uma tecnologia com retornos constantes de escala. Um quilograma de milho é capaz de produzir 0.8 litro de bourbon. Na economia há um indivíduo, com uma dotação de 2kg de milho. As preferências do indivíduo por milho e bourbon são representadas pela função utilidade:

$$u(m, b) = \log(5m) + b,$$

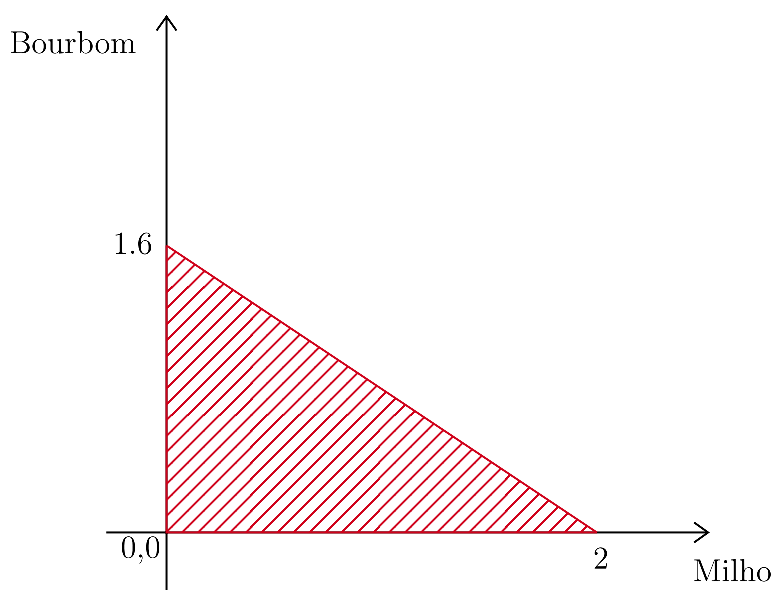
em que m representa a quantidade de milho consumido (em kg) e b a quantidade de bourbon consumido (em litros).

   (a) Em um gráfico com milho no eixo x e bourbon no eixo y, desenhe o conjunto de cestas de consumo factíveis.

   Sugestão de resposta.
   Como $(e_m, e_b) = (0, 1)$ e $y_b = 0.8(-y_m)$, a fronteira das cestas de consumo factíveis é

$$\begin{cases} x_m = 2 + y_m \\ x_b = 0 + 0.8(-y_m) \end{cases} \implies x_b = 0.8(2 - x_m).$$

   Portanto, o conjunto das cestas de consumo factíveis é



□

(b) Suponha que a produção de bourbon seja feita por uma firma competitiva. Qual deve ser a razão de preços p_m/p_b tal que a firma produza uma quantidade positiva de bourbon?

Sugestão de resposta.
A firma produzirá uma quantidade positiva de bourbon se[2]

$$\begin{aligned} \pi(p_b, p_m) = p_b y_b + p_m y_m &\geq 0 \\ p_b 0.8(-y_m) + p_m y_m &\geq 0 \\ \frac{p_m}{p_b} &\leq 0.8 \end{aligned}$$

□

(c) Encontre um vetor de preços e a alocação de Equilíbrio Walrasiano dessa economia.

Sugestão de resposta.
Do item anterior temos que a firma irá produzir uma quantidade positiva de bourbon se $p_m < 0.8p_b$. Mas, note que, como a função lucro é linear em y_m, então neste caso a firma demandará uma quantidade infinita de milho, sendo impossível zerar o excesso de demanda por milho. Assim, tal caso não pode constituir um Equilíbrio Walrasiano.
Logo, deve valer que a firma não produz ou que $p_m = 0.8p_b$. Foquemos no segundo caso.
Olhando para o problema do consumidor, note que a função utilidade é estritamente crescente em ambos os argumentos e, portanto, a restrição orçamentária se torna

$$\begin{aligned} p_m m + p_b b = p_m * 2 + p_b * 0 + \pi(p_m, p_b) \\ p_m m + p_b b = 2p_m \\ \frac{p_m}{p_b} m + b = \frac{2p_m}{p_b} \\ b = 0.8(2 - m) \end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo (8) na função utilidade, o problema do consumidor se torna

$$\max_{m} \quad \log(5m) + 0.8(2 - m)$$

Resolvendo o problema acima, encontramos $m^* = \frac{5}{4}$. Usando as restrições de factibilidade, encontramos que a alocação de Equilíbrio Walrasiano será

$$((m^*, b^*), (y_m^*, y_b^*)) = \left(\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{5} \right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{5} \right) \right)$$

[2] Lembrando que $y_m < 0$

e um vetor de preços de Equilíbrio Walrasiano deve ser proporcional a

$$(p_m^*, p_b^*) = (0.8, 1)$$

$\square$

(d) Como muda a alocação consumida no EW se a dotação inicial de milho for 4kg? Qual a intuição para esse resultado?

Sugestão de resposta.
Resolvendo de forma idêntica ao item anterior, encontramos que a alocação de Equilíbrio Walrasiano será

$$((m^*, b^*), (y_m^*, y_b^*)) = \left(\left(\frac{5}{4}, \frac{11}{5}\right), \left(-\frac{11}{4}, \frac{11}{5}\right)\right)$$

e um vetor de preços de Equilíbrio Walrasiano deve ser proporcional a

$$(p_m^*, p_b^*) = (0.8, 1).$$

Para entender a intuição por trás deste resultado, repare que, como a função utilidade é quase-linear, não há efeito renda e, como a função lucro é linear, a razão de preços deve ser a mesma em ambos os casos. Assim, o consumidor escolhe consumir uma quantidade fixa de milho e usa o restante da sua dotação inicial com o consumo de outros bens. $\square$

5. Suponha uma economia com um consumidor com função de utilidade

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\log(x_1) + \frac{1}{2}\log(x_2)$$

Existem duas firmas competitivas com funções de produção $y_1 = \sqrt{l_1}$ e $y_2 = \sqrt{l_2}$, onde y_j e l_j são respectivamente a quantidade produzida do bem j e a quantidade de trabalho empregada na produção de j, para $j = 1, 2$. Existe uma quantidade agregada de trabalho na economia, pertencente ao agente, igual a 10 horas, que são ofertadas à empresa para produzir os dois bens (ele trabalha nas duas empresas).

(a) Quantos mercados temos na economia?

Sugestão de resposta.
Há três mercados nesta economia: os mercados para os bens 1 e 2, e o mercado de trabalho. Logo, esta economia está restrita por três condições de factibilidade

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ l_1 + l_2 &= 10 \end{aligned}$$

$\square$

(b) Encontre as alocações e preços de Equilíbrio Walrasiano para esta economia.

Sugestão de resposta.
Sejam p_j o preço do bem j e w o salário pago ao consumidor por cada hora trabalhada. O problema do consumidor é

$$\max_{x_1, x_2, l_1, l_2} \quad \frac{1}{2}\log(x_1) + \frac{1}{2}\log(x_2)$$
$$s.a. \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = w(l_1 + l_2) + \pi_1(p_1, w) + \pi_2(p_2, w)$$

do qual obtemos as seguintes demandas Marshallianas

$$x_1^* = \frac{w(l_1 + l_2) + \pi_1(p_1, w) + \pi_2(p_2, w)}{2p_1} \tag{9}$$

$$x_2^* = \frac{w(l_1 + l_2) + \pi_1(p_1, w) + \pi_2(p_2, w)}{2p_2} \tag{10}$$

Dividindo (10) por (9), obtemos

$$\frac{x_2^*}{x_1^*} = \frac{p_1}{p_2} \tag{11}$$

Como, pelas condições de factibilidade, $y_j^* = x_j^*$ e $y_j^* = \sqrt{l_j^*}$, para $j = 1, 2$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{l_2^*}}{\sqrt{l_1^*}} \tag{12}$$

Agora olhando para as firmas, o problema da firma j é

$$\max_{l_j} \quad p_j\sqrt{l_j} - wl_j$$

o qual tem a seguinte condição de primeira ordem

$$\frac{p_j}{2\sqrt{l_j^*}} = w$$

Como a condição acima vale para $j = 1, 2$, temos

$$\frac{p_1}{2\sqrt{l_1^*}} = \frac{p_2}{2\sqrt{l_2^*}} \implies \frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{l_1^*}}{\sqrt{l_2^*}} \tag{13}$$

De (12) e (13) concluímos que

$$\frac{\sqrt{l_2^*}}{\sqrt{l_1^*}} = \frac{\sqrt{l_1^*}}{\sqrt{l_2^*}} \implies l_1^* = l_2^*$$

Da condição de factibilidade do mercado de trabalho e o resultado acima, concluímos que $l_1^* = l_2^* = 5$. Portanto, a alocação de Equilíbrio Walrasiano será

$$((x_1^*, x_2^*), (y_1^*, l_1^*), (y_2^* l_2^*)) = ((\sqrt{5}, \sqrt{5}), (\sqrt{5}, 5), (\sqrt{5}, 5))$$

e um vetor de preços de Equilíbrio Walrasiano deve ser proporcional a

$$(p_1^*, p_2^*, w^*) = \left(1, 1, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right).$$

□

(c) Resolva o problema do planejador e encontre a alocação eficiente de Pareto.

Sugestão de resposta.
O problema do planejador é

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, l_1, l_2} \quad & \frac{1}{2}\log(x_1) + \frac{1}{2}\log(x_2) \\ s.a. \quad & x_1 = y_1, \; y_1 = \sqrt{l_1} \\ & x_2 = y_2, \; y_2 = \sqrt{l_2} \\ & l_1 + l_2 = 10 \end{aligned}$$

Substituindo as restrições na função objetivo, o problema se torna

$$\max_{l_1} \quad \frac{1}{2}\log(\sqrt{l_1}) + \frac{1}{2}\log(\sqrt{10 - l_1})$$

Resolvendo o problema acima e usando as restrições do problema original, encontramos uma alocação eficiente de Pareto igual a alocação de Equilíbrio Walrasiano do item anterior. $\square$