Avaliação # 2 - Sugestões de Respostas

1. **(3,0 pontos)** No auge da Guerra Fria, temos dois grandes jogadores no cenário internacional: EUA e URSS. Os EUA consideram um ataque tático a instalações militares soviéticas em Cuba. Caso os EUA lancem o ataque, a URSS observa o movimento e precisa decidir se retalia lançando o mundo em um conflito nuclear. O payoff dos dois jogadores caso os EUA não lancem o ataque é 0. Caso haja o ataque e subsequente retaliação o payoff é -10 para os dois jogadores. O ataque seguido de não retaliação traz payoff 1 para os EUA e -1 para a URSS.

   (a) Escreva o jogo na forma normal e encontre todos os Equilíbrios de Nash do jogo.

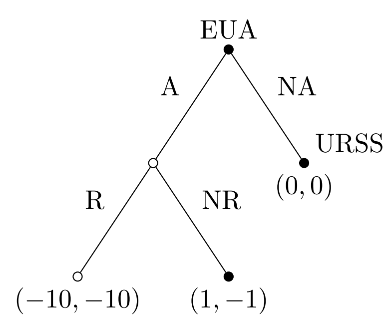
   Sugestão de resposta.

		URSS	
		R	NR
EUA	A	-10,-10	1,-1
	NA	0,0	0,0

   Há dois Equilíbrios de Nash: $\{(NA, R); (A, NR)\}$ □

   (b) Escreva o jogo na forma extensiva e encontre todos os Equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos.

   Sugestão de resposta.

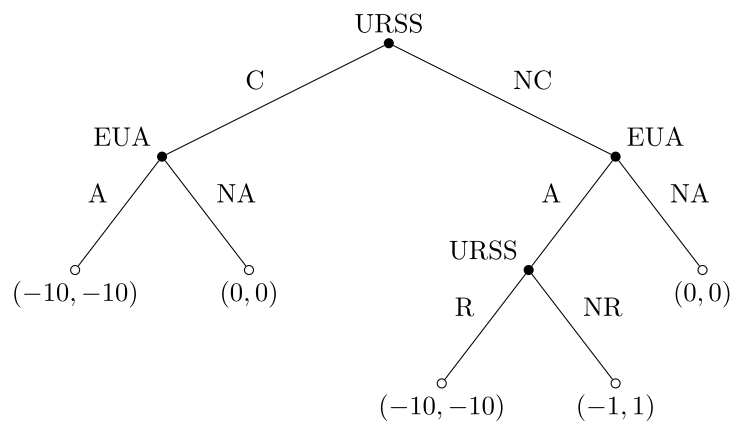


   Há um único Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos: $\{(A, NR)\}$ □

Nos próximos itens, suponha que antes dos EUA decidirem sobre seu ataque a URSS decide se constrói ou não uma "Doomsday Machine".[1] Caso construa tal máquina, a retaliação ao ataque americano torna-se automática.

(c) Suponha que os EUA observem se houve a construção da "Doomsday Machine" antes de decidir seu ataque. Escreva esse novo jogo na forma extensiva e encontre todos os Equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos.

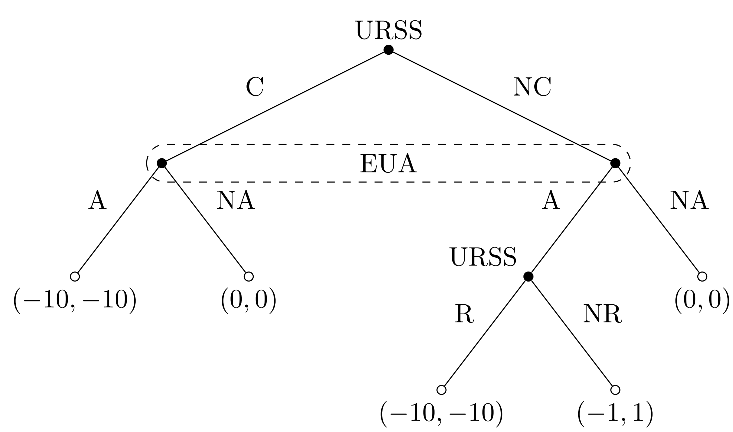
Sugestão de resposta.



Há um único Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos: $\{(C\ NR, NA\ A)\}$ $\square$

(d) Agora suponha que os EUA não observam se houve a construção da "Doomsday Machine". Escreva esse novo jogo na forma extensiva e encontre todos os Equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos.

Sugestão de resposta.



Há dois Equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos: $\{(C\ NR, NA), (NC\ NR, A)\}$ $\square$

[1] Lembrem-se do trecho do filme Dr. Fantástico visto em sala.

2. **(2,5 pontos)** N firmas competem a la Cournot em um mercado de um bem homogêneo. A demanda inversa de mercado é

$$p(Q) = 1 - Q,$$

em que Q é a quantidade total produzida pelas N firmas. As firmas tem custo marginal igual a $c < 1$.

(a) Encontre o Equilíbrio de Nash (simétrico) do jogo.

Sugestão de resposta.
O problema da firma i é

$$\max_{q_i} \left(1 - q_i - \sum_{j \neq i} q_j - c \right) q_i$$

Cuja condição de primeira ordem implica a seguinte curva de reação

$$q_i^*(q_{-i}) = \frac{(1-c) - \sum_{j \neq i} q_j}{2}$$

Como o jogo é simétrico, em equilíbrio devemos ter $q_j^* = q_i^*$ para todo j. Assim,

$$\begin{aligned} q_i^* &= \frac{(1-c) - \sum_{j \neq i} q_i^*}{2} \\ &= \frac{(1-c) - (n-1)q_i^*}{2} \\ &= \frac{(1-c)}{(n+1)} \end{aligned}$$

Portanto, no Equilíbrio de Nash todos os jogadores escolhem produzir $\frac{(1-c)}{(n+1)}$ unidades do bem. □

(b) Suponha que esse jogo seja repetido por 10 períodos, com todas as ações pregressas observadas. O payoff das firmas é dado pela soma dos lucros em todos os períodos. As firmas conseguem sustentar lucros maiores a cada período do que o auferido em EN do jogo estágio (a) como resultado de ENPS? Justifique. Se a resposta for positiva, indique o perfil de estratégias desse equilíbrio e eventuais condições adicionais.

Sugestão de resposta.
Não, as firmas não conseguem sustentar lucros maiores. Quando o jogo estágio possui apenas um único Equilíbrio de Nash e é repetido por um número finito de vezes, o ENPS deve ser tal que as estratégias de equilíbrio do jogo estágio são jogadas em todos os períodos. □

(c) Suponha agora que o jogo seja repetido infinitamente e que as firmas descontem lucros futuros a taxa δ. As firmas conseguem sustentar lucros maiores a cada período do que o auferido em EN do jogo estágio (a) como resultado de ENPS? Justifique. Se a resposta for positiva, indique o perfil de estratégias desse equilíbrio e eventuais condições adicionais.

Sugestão de resposta.
Sim, as firmas conseguem sustentar lucros maiores se cooperarem para produzirem juntas a quantidade de monopólio, desde que a taxa de desconto seja grande o suficiente. Para ver isso, basta notar que:
No jogo estágio temos:

- Curva de reação:

$$q_i^*(q_{-i}) = \frac{(1-c) - \sum_{j\neq i} q_j}{2}$$

- Equilíbrio de Cournot:

$$q_i^* = q_{-i}^* = \frac{1-c}{n+1} \implies \pi_i^C = \pi_j^C = \left(\frac{1-c}{n+1}\right)^2$$

- Monopólio:

$$\begin{aligned} q^M &= \frac{1-c}{2} \implies q_i^M = q_{-i}^M = \frac{1-c}{2n} \\ \pi^M &= \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \implies \pi_i^M = \pi_{-j}^M = \frac{(1-c)^2}{4n} \end{aligned}$$

- Desvio mais lucrativo:

$$q_i^d = q_i^*(q_{-i}^M) = \frac{n+1}{4n}(1-c) \implies \pi_i^d = \left(\frac{n+1}{4n}\right)^2 (1-c)^2$$

O valores de δ para os quais a estratégia de gatilho de reversão permanente ao EN sustenta o payoff de monopólio como ENPS são tais que

$$\begin{aligned} \pi_i^M + \delta^*\pi_i^M + \delta^{*2}\pi_i^M + \ldots &\geq \pi_i^d + \delta^*\pi_i^C + \delta^{*2}\pi_i^C + \ldots \\ \frac{\pi_i^M}{1-\delta^*} &\geq \pi_i^d + \frac{\delta^*\pi_i^C}{1-\delta^*} \\ \pi_i^M &\geq (1-\delta)\pi_i^d + \delta * \pi_i^C \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-c)^2}{4n} &\geq (1-\delta)\left(\frac{n+1}{4n}\right)^2(1-c)^2 + \delta * \left(\frac{1-c}{n+1}\right)^2 \\
\frac{1}{4n} &\geq (1-\delta)\frac{(n+1)^2}{(4n)^2} + \delta * \frac{1}{(n+1)^2} \\
\frac{1}{4n} - \frac{(n+1)^2}{(4n)^2} &\geq \delta * \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{(4n)^2}\right) \\
4n - (n+1)^2 &\geq \delta * \left(\frac{(4n)^2 - (n+1)^4}{(n+1)^2}\right) \\
\delta &\geq \frac{(n+1)^2(4n-(n+1)^2)}{(4n+(n+1)^2)(4n-(n+1)^2)} \\
\delta &\geq \frac{(n+1)^2}{4n+(n+1)^2} \\
\delta &\geq \frac{1}{\left(1+\frac{4n}{(n+1)^2}\right)}
\end{aligned}
$$

□

(d) Avalie a frase:

> "Em mercados com mais competidores, a coordenação entre as firmas é naturalmente mais difícil, porém elas tem mais incentivos a coordenarem suas ações."

Sugestão de resposta.
A frase faz sentido e está de acordo com os resultados encontrados no item anterior. Para ver que a coordenação se torna mais difícil basta reparar que

$$
\begin{aligned}
n \to \infty &\implies \frac{4n}{(n+1)^2} \to 0 \\
&\implies \frac{1}{\left(1+\frac{4n}{(n+1)^2}\right)} \to 1 \\
&\implies \delta \to 1
\end{aligned}
$$

Ou seja, quando o número de aumenta também aumenta a taxa de desconto necessária para sustentar a cooperação.

Agora, para ver que os incentivos a coordenarem suas ações aumenta com o número de competidores baste reparar que o lucro de monopólio é inversamente proporcional a n, enquanto tanto o lucro do desvio quanto o lucro do equilíbrio de Cournot decrescem a uma taxa quadrática em n.

□

3. **(2,5 pontos)** Considere um jogo simples de sinalização para o mercado de trabalho. Um trabalhador pode ser de 2 tipos: alto (h) ou baixo (ℓ), ambos tipos ocorrem com igual probabilidade. O trabalhador conhece o seu tipo e toma uma decisão de fazer ou não faculdade. A firma não observa o tipo do trabalhador, apenas sua decisão de cursar ou não faculdade. A firma então decide ofertar ou não uma vaga ao trabalhador.

   O payoff dos trabalhadores é dado por:

$$u_{trab} = w - e,$$

   em que e representa o esforço em se educar e w o salário auferido na firma. Tanto e e w dependem das escolhas de trabalhadores e firmas:

$$w = \begin{cases} 1 & \text{se a firma oferece a vaga,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$e = \begin{cases} 1 & \text{se faz faculdade e tipo } \ell, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

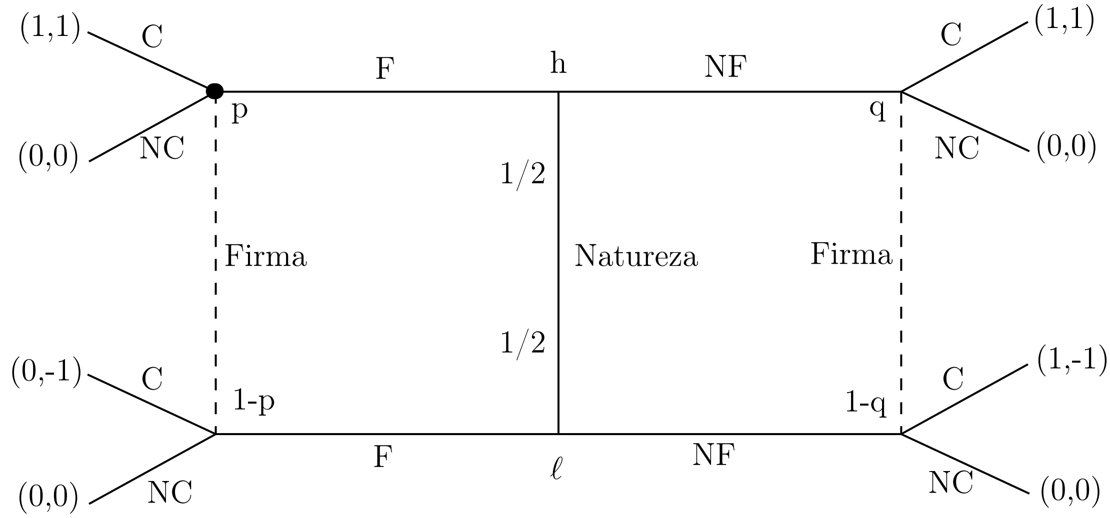
   ou seja, o trabalhador só tem um custo em se educar se for tipo ℓ. Por sua vez, o lucro da firma é dado por

$$u_{firma} = \begin{cases} 1 & \text{se contrata o tipo } h, \\ -1 & \text{se contrata o tipo } \ell, \\ 0 & \text{se não contrata.} \end{cases}$$

   Note que não há nenhum valor intrínseco na educação nesse modelo. A firma só se importa com o tipo nato do trabalhador.

(a) Escreva esse jogo de sinalização na forma extensiva.

Sugestão de resposta.



□

(b) Defina um *Perfect Bayesian Equilibrium* (PBE) para o jogo acima.

Sugestão de resposta.
Neste jogo, um *Perfect Bayesian Equilibrium* é formado por uma estratégia para cada tipo de trabalhador, uma estratégia para cada sinal que a firma venha a observar e um perfil de crenças da firma para cada um de seus conjuntos informacionais, sendo esses sequencialmente racionais e consistentes com a Regra de Bayes. □

(c) Encontre um PBE separador em que o trabalhador de tipo h escolha fazer faculdade e o de tipo ℓ escolha não fazer faculdade.

Sugestão de resposta.
Considere o PBE caracterizado por

$$\Big((F|h, NF|\ell), (C|F, NC|NF), (p = 1, q = 0)\Big)$$

Agora vamos checar se tal perfil de estratégias e crenças é de fato sequencialmente racional.

Primeiro, note que sob essas crenças é ótimo para a firma contratar os trabalhadores os quais escolheram fazer faculdade e não contratar aqueles que optaram por não fazer faculdade. Uma vez que a firma opte por essa estratégia, é ótimo para os trabalhadores do tipo h escolherem fazer faculdade, enquanto os trabalhadores do tipo ℓ ficam indiferentes entre fazer faculdade ou não (assumiremos que escolhem não fazer faculdade quando indiferentes). Assim concluímos que este perfil de estratégias é sequencialmente racional dadas as crenças da firma.

Por fim, vamos checar a consistência com a Regra de Bayes, lembrando a sua forma dada por

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

Ao final do processo resultante do perfil de estratégias e crenças proposto, temos que

$$\begin{aligned}
p = P(h|F) &= \frac{P(F|h)P(h)}{P(F|h)P(h) + P(F|\ell)P(\ell)} \\
&= \frac{1 * \frac{1}{2}}{1 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{2}} \\
&= 1 \\
q = P(h|NF) &= \frac{P(NF|h)P(h)}{P(NF|h)P(h) + P(NF|\ell)P(\ell)} \\
&= \frac{0 * \frac{1}{2}}{0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, o perfil de estratégias e crenças proposto é de fato um PBE.

□

(d) Esse jogo admite algum PBE com *pooling*?

Sugestão de resposta.

Considere o PBE caracterizado por

$$\left((F|h, F|\ell), (C|F, NC|NF), \left(p = \frac{1}{2}, q = 0\right)\right)$$

Agora vamos checar se tal perfil de estratégias e crenças é de fato sequencialmente racional.

Primeiro, note que sob essas crenças a firma fica indiferente entre contratar ou não os trabalhadores os quais escolheram fazer faculdade (assumiremos que escolha contratar quando indiferente) e não contratar aqueles que optaram por não fazer faculdade. Uma vez que a firma opte por essa estratégia, é ótimo para os trabalhadores do tipo h escolherem fazer faculdade, enquanto os trabalhadores do tipo ℓ ficam indiferentes entre fazer faculdade ou não (assumiremos que escolhem fazer faculdade quando indiferentes). Assim concluímos que este perfil de estratégias é sequencialmente racional dadas as crenças da firma.

Por fim, vamos checar a consistência com a Regra de Bayes. Ao final do processo resultante do perfil de estratégias e crenças proposto, temos que

$$\begin{aligned}
p = P(h|F) &= \frac{P(F|h)P(h)}{P(F|h)P(h) + P(F|\ell)P(\ell)} \\
&= \frac{1 * \frac{1}{2}}{1 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \\
q = P(h|NF) &= P(\emptyset) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, o perfil de estratégias e crenças proposto é de fato um PBE. $\square$

4. **(2,0 pontos)** Em uma cidade há duas firmas que poluem o ar com gases tóxicos. Um estudo encomendado pela cidade concluiu que o malefício marginal social de cada quilograma de gás tóxico emitido na cidade é constante e igual a R$ 300. As firmas tem custos (em reais) de redução das emissões de gases tóxicos dados por

$$c_1(x_1) = 3x_1^2,$$
$$c_2(x_2) = 5x_2^2,$$

em que x_1 e x_2 são as reduções de emissão de gases tóxicos em quilogramas das firmas 1 e 2 respectivamente.

(a) Suponha que a cidade decida implementar um sistema de quotas de redução para as firmas 1 e 2. Qual a distribuição de quotas que levaria a cidade ao nível eficiente de redução de emissões?

Sugestão de resposta.
Note que o benefício marginal social de reduzir um quilograma de gás tóxico emitido é constante e igual a R$ 300. Portanto, o problema do planejador social é

$$\max_{x_1,x_2} \quad 300(x_1 + x_2) - 3x_1^2 - 5x_2^2$$

Cujas condições de primeira ordem implicam em $x_1^* = 50$ e $x_2^* = 30$. Logo, quotas que estabelecem que a firma 1 deva reduzir ao menos 50kg de emissões do gás tóxico e que a firma 2 deva reduzir ao menos 30kg de emissões do gás tóxico levariam a cidade ao nível eficiente de redução de emissões. □

(b) Suponha que a cidade decida adotar um sistema do tipo *cap-and-trade* para lidar com o problema.

i. Descreva de forma precisa como o sistema deve ser implementado para levar a redução de emissões ao nível eficiente.
ii. Mostre que a alocação eficiente é alcançada com o sistema que você delineou.
iii. Discuta as vantagens e/ou desvantagens desse sistema vis-a-vis o sistema de quotas do item (a).

Sugestão de resposta.
O sistema de *cap-and-trade* deve estabeler uma quota de redução para cada firma de modo que as duas quotas estabelecidas somem 80kg. Além disso, também deve ser estabelecida a possibilidade de que ambas as firmas negociem suas quotas sem custos de transação.

Para ver que a alocação eficiente é alcançada pelo sistema de *cap-and-trade* desde que as quotas somem 80kg, note que os problemas das firmas são

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_1,v} \quad -3x_1^2 + pv \\
&\quad s.a. \;\; x_1 = h_1 + v \\
\equiv &\max_{v} \quad -3(h_1+v)^2 + pv
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_2,v} \quad -5x_2^2 - pv \\
&\quad s.a. \;\; x_2 = h_2 - v \\
\equiv &\max_{v} \quad -5(h_2-v)^2 - pv
\end{aligned}
$$

onde h_1 e h_2 são as quotas distribuídas de modo que $h_1+h_2 = 80$, v é a quantidade de quotas negociadas entre as firmas e p o preço pago/recebido por cada quota.

As condições de primeira ordem dos problemas formam o sistema

$$
\begin{cases} -6h_1 - 6v + p = 0 \\ 10h_2 - 10v - p = 0 \end{cases} \implies v = \frac{-6h_1 + 10h_2}{16}
$$

Usando o fato que $h_2 = 80 - h_1$ e substituindo na restrição do problema da firma 1, obtemos

$$
x_1^* = h_1 + \frac{-6h_1 + 10(80-h_1)}{16} = 50
$$

Fazendo o mesmo para a firma 2, obtemos

$$
x_2^* = h_2 - \frac{-6(80-h_2) + 10h_2}{16} = 30
$$

Note que as quantidades são idênticas as encontradas no item (a) e que não dependem de h_1 e h_2.

Uma vantagem desse sistema é que ele requer uma quantidade menor de informação para a implementação do ótimo social, não sendo necessário saber exatamente quanto de quotas alocar para cada firma. Uma desvantagem desse sistema é que a distribuição de quotas passa a poder ser afetada por falhas de mercado, como a restrição a crédito, as quais desviariam a alocação resultante do ótimo social. □