Avaliação # 1 - Sugestões de Resposta

1. **(2,0 pontos)** Em um jogo na forma normal,

		Jogador 2		
		A	B	C
	A	1,3	4,5	5,2
Jogador 1	B	3,4	3,4	1,1
	C	2,3	3,2	2,1

   (a) Quais estratégias sobrevivem ao processo de eliminação iterada de estratégias fracamente dominadas?

   Sugestão de resposta.
   O processo de eliminação iterada de estratégias fracamente dominadas pode seguir da seguinte forma:

   i. Jogador 2: A,B $\succ$ C
   ii. Jogador 1: B $\succeq$ C
   iii. Jogador 2: B $\succeq$ A
   iv. Jogador 1: A $\succ$ B

   Portanto sobrevivem ao processo de eliminação iterada de estratégias fracamente dominadas a estratégia A para o Jogador 1 e a estratégia B para o Jogador 2. $\square$

   (b) Qual o conjunto de estratégias racionalizáveis?

   Sugestão de resposta.
   O processo de eliminação iterada de estratégias que nunca são melhores respostas pode seguir da seguinte forma:

   i. Jogador 1: C nunca é melhor resposta
   ii. Jogador 2: C nunca é melhor resposta

   Portanto sobrevivem ao processo de eliminação iterada de estratégias que nunca são melhores respostas as estratégias A e B para o Jogador 1, e as estratégias A e B para o Jogador 2. $\square$

   (c) Quais perfis de estratégias constituem Equilíbrios de Nash do jogo?

   Sugestão de resposta.
   São Equilíbrios de Nash em estratégias puras os perfis de estratégias (A,B) e (B,A). $\square$

2. **(2,5 pontos)** Em um mercado monopolizado, temos N consumidores, cada um com demanda inversa:

$$p(q) = 1 - bq,$$

em que $b > 0$. A firma tem custo marginal constante igual a $c \in [0, 1)$.

(a) Supondo que a firma está restrita a cobrar um preço fixo por cada unidade vendida, qual a escolha de preço e quantidade total do monopolista?

Sugestão de resposta.
Seja $Q = Nq$ a demanda agregada, então a demanda inversa agregada é dada por

$$p(Q) = 1 - \frac{bQ}{N}$$

e o problema do monopolista é

$$\max_{Q} \quad \left(1 - \frac{b}{N}Q - c\right) Q$$

Resolvendo o problema acima encontramos $Q^* = \frac{1}{2}\frac{N}{b}(1-c)$ e fazendo $p^* = p(Q^*)$ encontramos $p^* = \frac{1+c}{2}$. $\square$

(b) Compute a elasticidade da demanda no ponto de escolha ótima do monopolista encontrado em (a). Nesse ponto a demanda pode ser inelástica? Explique.

Sugestão de resposta.
A elasticidade da demanda no ponto de escolha ótima do monopolista é

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \left|\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{p^*}{Q^*}\right| \\
&= \left|-\frac{N}{b}\frac{\frac{1+c}{2}}{\frac{1}{2}\frac{N}{b}(1-c)}\right| \\
&= \frac{1+c}{1-c} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Neste ponto a demanda não pode ser inelástica. Para ver isso, lembre que o lucro marginal do monopolista é dado por $\pi' = RMg - c$ e note que

$$\begin{aligned}
Receita &= PQ \\
\implies RMg &= \frac{\partial P}{\partial Q}Q + P \\
&= \frac{\partial P}{\partial Q}\frac{Q}{P}P + P \\
&= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) P
\end{aligned}$$

Logo, se o monopolista atuasse na parte inelástica da demanda ($\varepsilon < 1$), ele estaria escolhendo uma quantidade a qual torna sua receita marginal negativa e, consequentemente, seu lucro marginal seria também negativo. Assim, o monopolista poderia aumentar seu lucro ao diminuir a quantidade produzida e, portanto, não estaria anteriormente agindo de forma a maximizar seu lucro. □

(c) Calcule a perda de bem-estar do monopólio. Para qual valor de custo marginal ela é máxima?

Sugestão de resposta.
Vamos primeiro encontrar Q^0 para então calcularmos a perda de bem-estar do monopólio. Temos que

$$\begin{aligned} p(Q^0) &= c \\ 1 - \frac{b}{N}Q^0 &= c \\ Q^0 &= \frac{N}{b}(1-c) \end{aligned}$$

Agora, para encontrarmos a perda de bem-estar do monopólio basta resolver

$$\begin{aligned} DWL^M &= \int_{Q^*}^{Q^0} (p(Q) - c)dQ \\ &= \int_{\frac{1}{2}\frac{N}{b}(1-c)}^{\frac{N}{b}(1-c)} \left(1 - \frac{b}{N}Q - c\right) dQ \\ &= \left((1-c)Q - \frac{1}{2}\frac{b}{N}Q^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}\frac{N}{b}(1-c)}^{\frac{N}{b}(1-c)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{N}{b}(1-c)^2 - \frac{3}{8}\frac{N}{b}(1-c)^2 \\ &= \frac{1}{8}\frac{N}{b}(1-c)^2 \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{8}\frac{N}{b}(1-c)^2\right) &= -\frac{1}{4}\frac{N}{b}(1-c) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Logo, a perda de bem-estar do monopólio é máxima quando $c = 0$. □

3. **(2,5 pontos)** Em uma economia há apenas **um** agente que vive dois períodos, $t = 1, 2$ e consome apenas um bem de consumo. Há incerteza quanto ao período $t = 2$, em que temos dois estados da natureza possíveis $s = 1, 2$. O consumidor tem dotações iguais do bem consumo em todos os períodos e estados da natureza: $(e_1, e_{21}, e_{22}) = (1, 1, 1)$. A utilidade do consumidor é

$$u(x_1) + \beta \mathbb{E}\left[u(x_{2s})\right],$$

com $u(\cdot)$ estritamente crescente e estritamente côncava.

Nessa economia temos dois ativos:

i um ativo livre de risco que paga 1 unidade do bem em $t = 2$, cujo preço em equilíbrio é $3/4$ do bem em $t = 1$;

ii e um ativo arriscado que paga 2 unidades do bem em $s = 1$ e nada mais, cujo preço em equilíbrio é $1/2$ do bem em $t = 1$.

Responda:

(a) Quais os preços dos ativos de Arrow dessa economia?

Sugestão de resposta.
Primeiro, note que não há incerteza em $t = 1$ e que os preços estão normalizados em razão do bem em $t = 1$. Então, trivialmente devemos ter $p_1 = 1$.

A seguir, note que, pela condição de não arbitragem, o preço do ativo livre de risco deve ser igual a soma dos preços dos ativos de Arrow para $t = 2$, ou seja

$$p_{21}^* + p_{22}^* = \frac{3}{4} \tag{1}$$

Por fim, note que, também pela condição de não arbitragem, o preço do ativo arriscado deve ser igual a duas vezes o preço do ativo de Arrow para $t = 2$ e $s = 1$, ou seja

$$2p_{21}^* = \frac{1}{2} \tag{2}$$

Portanto, de (1) e (2) concluímos que $p_{21}^* = \frac{1}{4}$ e $p_{22}^* = \frac{1}{2}$. □

(b) Qual a probabilidade implícita nos preços de ocorrência do estado $s = 1$? Qual deve ser o valor da taxa de desconto β?

Sugestão de resposta.
Lembre que

$$p_{2s}^* = \beta q_s \frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)}$$

Agora, note que pela equação anterior deve valer

$$\begin{aligned} e_{21} = e_{22} &\implies \frac{p^*_{21}}{q_1} = \frac{p^*_{22}}{q_2} \\ &\implies \frac{1}{4q_1} = \frac{1}{2q_2} \\ &\implies q_1 = \frac{q_2}{2} \end{aligned}$$

Juntando o resultado acima com fato que $q_1 + q_2 = 1$ encontramos $q_1 = \frac{1}{3}$. Além disso, lembrando que o preço do ativo livre de risco, p_f, deve ser tal que

$$p_f = \beta \mathbb{E}\left[\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)}\right]$$

e notando que

$$\begin{aligned} e_1 = e_{21} = e_{22} = 1 &\implies \mathbb{E}\left[\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{u'(1)}{u'(1)}\right] \\ &\implies \mathbb{E}\left[\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)}\right] = 1 \\ &\implies p_f = \beta \end{aligned}$$

temos que $\beta = \frac{3}{4}$. □

(c) Como sua resposta ao item (b) mudaria se a dotação fosse $(e_1, e_{21}, e_{22}) = (1, 2, 2)$? Mais especificamente, como se comparariam a taxa de desconto β e a probabilidade de ocorrência do estado $s = 1$ encontradas agora com os valores encontrados em (b)?

Sugestão de resposta.
Como continuaria valendo que $e_{21} = e_{22}$, então a probabilidade de ocorrência do estado $s = 1$ não se alteraria. Já a taxa de desconto β passaria a ser maior, uma vez que ela deve satisfazer

$$\beta = \frac{p_f}{\mathbb{E}\left[\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)}\right]}$$

e o fato da função utilidade ser estritamente côncava implicaria que $\frac{u'(2)}{u'(1)} < 1$ □

4. **(2,5 pontos)** Uma empresa monopolista no mercado de banda larga possui um custo marginal por GB (gigabyte) de dados igual a zero e dois tipos de clientes: os que possuem TV 4k e os que possuem aparelhos comuns. As funções de demanda inversa para cada tipo de cliente, com TV 4k e com TV comum, são dadas por:

$$
\begin{aligned}
p_{4k}(q_{4k}) &= 6 - \frac{q_{4k}}{20} \\
p_c(q_c) &= 12 - \frac{q_c}{5}
\end{aligned}
$$

(a) Suponha que a firma possa desenhar um contrato específico para cada tipo de consumidor. Um contrato nesse caso será um par (tarifa fixa, quantidade). Quais contratos escolhidos para os dois tipos de consumidores? Como chamamos esse tipo de discriminação de preços?

Sugestão de resposta.
Primeiro, note que o excedente de cada tipo de consumidor pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
EC_{4k}(q_{4k}) &= \int_0^{q_{4k}} \left(6 - \frac{q}{20} - p_{4k}(q_{4k})\right) dq - f_{4k} \\
&= \left(6 - \frac{q_{4k}}{40} - p_{4k}(q_{4k})\right) q_{4k} - f_{4k} \\
&= \frac{q_{4k}^2}{40} - f_{4k} \\
EC_c(q_c) &= \int_0^{q_c} \left(12 - \frac{q}{5} - p_c(q_c)\right) dq - f_c \\
&= \left(12 - \frac{q_c}{10} - p_c(q_c)\right) q_c - f_c \\
&= \frac{q_c^2}{10} - f_c
\end{aligned}
$$

Agora, para escolher os contratos, o monopolista deve resolver o problema de maximização de lucro sujeito às restrições de participação dos dois tipos de consumidores.

$$
\begin{aligned}
\max_{q_{4k}, f_{4k}, q_c, f_c} \quad & \left(6 - \frac{q_{4k}}{20}\right) q_{4k} + f_{4k} + \left(12 - \frac{q_c}{5}\right) + f_c \\
s.a. \quad & \frac{q_{4k}^2}{40} - f_{4k} \geq 0 \\
& \frac{q_c^2}{10} - f_c \geq 0
\end{aligned}
$$

Note que a função objetivo é estritamente crescente em f_{4k} e f_c, enquanto as restrições são estritamente decrescentes em f_{4k} e f_c. Logo, as restrições devem valer com igualdade e podemos substitui-las na função objetivo. O problema do monopolista se torna

$$\max_{q_{4k}, q_c} \left(6q_{4k} - \frac{q_{4k}^2}{40}\right) + \left(12q_c - \frac{q_c^2}{10}\right)$$

Resolvendo o problema acima encontramos $q_{4k}^* = 120$ e $q_c^* = 60$. Substituindo estes valores nas restrições encontramos $f_{4k}^* = 360$ e $f_c^* = 360$. Portanto, o contrato ótimo 4k é o par $(\$360, 120GB)$ e o contrato comum ótimo é o par $(\$360, 60GB)$.

Este tipo de discriminação de preços, onde o monopolista observa a propensão a consumir de cada consumidor e pode oferecer um contrato específico para ele, é chamado de discriminação de preços de 1º grau. □

(b) Em muitos casos a legislação proíbe cobrar preços diferentes para diferentes grupos de consumidores. Considere dois tipos de cobrança de tarifas:

i Cobrança de 6 por GB, sem tarifa fixa;

ii Cobrança de uma tarifa fixa de 300 por um pacote com 80 GB.

Encontre a decisão ótima de cada tipo de consumidor.

Sugestão de resposta.
Vamos analisar cada caso para cada tipo de consumidor. Começando pelos consumidores que possuem TV 4k.

- Cobrança de 6 por GB, sem tarifa fixa;
  Neste caso, os consumidores escolherão consumir $q_{4k} = 0$ e o excedente do consumidor se torna

$$\begin{aligned} EC_{4k}(0) &= \int_0^0 \left(6 - \frac{q}{20} - 6\right) dq - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Cobrança de uma tarifa fixa de 300 por um pacote com 80 GB.
  O excedente do consumidor se torna

$$\begin{aligned} EC_{4k}(80) &= \int_0^{80} \left(6 - \frac{q}{20} - 0\right) dq - 300 \\ &= \left(6q - \frac{q^2}{20}\right)\Bigg|_{q=0}^{80} - 300 \\ &= 320 - 300 = 20 \end{aligned}$$

Logo, os consumidores que possuem TV 4k escolherão o pacote ii. Agora olhemos para os consumidores que possuem TV comum.

- Cobrança de 6 por GB, sem tarifa fixa;

Neste caso, os consumidores escolherão consumir $q_c = 30$ e o excedente do consumidor se torna

$$
\begin{aligned}
EC_c(30) &= \int_0^{30} \left(12 - \frac{q}{5} - 6\right) dq - 0 \\
&= \left(6q - \frac{q^2}{10}\right)\Bigg|_{q=0}^{30} \\
&= 90
\end{aligned}
$$

- Cobrança de uma tarifa fixa de 300 por um pacote com 80 GB.
  Note que neste caso o consumidor nunca consumirá uma quantidade maior do que 60, então o excedente do consumidor se torna

$$
\begin{aligned}
EC_c(60) &= \int_0^{60} \left(12 - \frac{q}{5} - 0\right) dq - 300 \\
&= \left(12q - \frac{q^2}{10}\right)\Bigg|_{q=0}^{60} - 300 \\
&= 360 - 300 = 60
\end{aligned}
$$

Logo, os consumidores que possuem TV comum escolherão o pacote i. $\square$

5. **(1,0 ponto)** Considere o seguinte jogo simultâneo com 2 jogadores. Cada jogador escolhe um nível de esforço $a_i \in [0,1]$. O payoff do agente i é dado por

$$\pi_i(a_i, a_j) = 4\min\{a_i, a_j\} - 2a_i.$$

Ou seja os esforços são complementares e custosos.

(a) Encontre todos os Equilíbrios de Nash do jogo.

Sugestão de resposta.
Para acharmos os Equilíbrios de Nash vamos olhar para quais são as melhores respostas do agente i. Para um dado $\bar{a}_j$, note que:

- $a_i > \bar{a}_j$ nunca é melhor resposta. Neste caso o payoff se torna

$$\pi_i(a_i, \bar{a}_j) = 4\bar{a}_j - 2a_i,$$

função estritamente decrescente em a_i. Logo, qualquer a_i' tal que $a_i > a_i' \geq \bar{a}_j$ é um desvio lucrativo.

- $a_i < \bar{a}_j$ nunca é melhor resposta. Neste caso o payoff se torna

$$\pi_i(a_i, \bar{a}_j) = 2a_i,$$

função estritamente crescente em a_i. Logo, qualquer a_i' tal que $\bar{a}_j \geq a_i' > a_i$ é um desvio lucrativo.

- $a_i = \bar{a}_j$ é melhor resposta, pois qualquer outra estratégia pura a_i' resultaria em um payoff menor. Neste caso o payoff é tal que $\pi_i(\bar{a}_j, \bar{a}_j) = 2\bar{a}_j$. Se o agente i escolhesse qualquer $a_i' > \bar{a}_j$, ele obteria o payoff

$$\pi_i(a_i', \bar{a}_j) = 4\bar{a}_j - 2a_i' < 2\bar{a}_j = \pi_i(\bar{a}_j, \bar{a}_j)$$

e se o agente i escolhesse qualquer $a_i' < \bar{a}_j$, ele obteria o payoff

$$\pi_i(a_i', \bar{a}_j) = 2a_i' < 2\bar{a}_j = \pi_i(\bar{a}_j, \bar{a}_j).$$

Assim os Equilíbrio de Nash são quaisquer pares (a_i^*, a_j^*) tais que $a_i^*, a_j^* \in [0,1]$ e $a_i^* = a_j^*$. □

(b) Algum desses equilíbrios é Pareto Eficiente?

Sugestão de resposta.
O perfil de estratégias de equilíbrio $(1,1)$ é Pareto Eficiente, uma vez que nenhum outro perfil de estratégias, de equilíbrio ou não, possibilita que algum dos agentes melhore. Além disso, nenhum outro perfil de estratégias de equilíbrio é Pareto Eficiente, pois $(1,1)$ representa uma melhora para ambos os agentes. □