Microeconomia II: Equilíbrio Geral

Marcelo Sant'Anna

FGV EPGE

19 de agosto de 2019

Equilíbrio Geral, *roadmap*

1. Equilíbrio em uma econonomia de trocas
2. Equilíbrio com produção
3. Equilíbrio com mercados contingentes

Obs: Notas baseadas em Jehle e Reny.

Economia de trocas puras - Definição

Começamos pelo modelo mais simples que permite entender os fundamentos das trocas na economia. Nesse modelo estilizado, temos dois bens $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ e dois agentes, a e b. Denotamos as quantidades consumidas dos dois bens por a e b, respectivamente, por

$$x_a = (x_{a1}, x_{a2}) \text{ e } x_b = (x_{b1}, x_{b2}).$$

Para tornar ainda mais simples a análise, supomos que não há produção. Os agentes a e b possuem dotações iniciais dos dois bens.

As dotações iniciais de a e b são dadas, respectivamente, por

$$e_a = (e_{a1}, e_{a2}) \text{ e } e_b = (e_{b1}, e_{b2}).$$

Economia de trocas puras - Factibilidade

Definição 1 (Alocação factível)

O conjunto de alocações de consumo factíveis na economia de trocas puras é dado por

$$F(e_a, e_b) = \left\{ (x_a, x_b) \in \mathbb{R}^4_+ \middle| \begin{array}{l} x_{1a} + x_{1b} = e_{1a} + e_{1b} \\ x_{2a} + x_{2b} = e_{2a} + e_{2b} \end{array} \right\}.$$

Hipótese 1 (Utilidade dos consumidores)

A utilidade dos agentes $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, *para* $i = a, b$, *é contínua, estritamente crescente e estritamente quase-côncava.*

Dizemos que uma alocação é eficiente no sentido de Pareto se não existe forma factível de melhorar algum agente sem que algum agente seja prejudicado.

Definição 2 (Eficiência de Pareto)

Uma alocação factível $(x_a, x_b) \in F(e_a, e_b)$ é Pareto Eficiente se não existe outra alocação factível $(y_a, y_b) \in F(e_a, e_b)$ tal que $y_a \succeq^a x_a$ e $y_b \succeq^b x_b$, com preferência estrita para pelo menos um agente.

Exemplo 1

Seja uma economia de trocas com dois consumidores a e b, com funções utilidade iguais

$$u^i(x_{1i}, x_{2i}) = \log(x_{1i}) + \log(x_{2i}), \text{ para } i = a, b;$$

e dotações dos bens iniciais $e_a = (2, 3)$ e $e_b = (3, 7)$, encontre o conjunto de alocações Pareto Eficientes.

Em equilíbrio competitivo, os agentes tomam preços dos bens como dado. Seja $(p_1, p_2) \gg 0$ o vetor de preços do mercado. O agente $i = a, b$ resolve

$$\max_{x_1, x_2} u^i(x_1, x_2)$$
$$s.t.\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq p_1 e_{1i} + p_2 e_{2i}$$

Teorema 1 (Propriedades da demanda)

Se u^i satisfaz a Hipótese 1, então para todo $\mathbf{p} \gg 0$, o problema do consumidor tem uma solução única $x^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i)$.

Definição 3 (Excesso de demanda)

A função agregada de excesso de demanda é dada por

$$z_j(p) \equiv \sum_{i=a,b} x_j^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i) - \sum_{i=a,b} e_{ij}, \text{ para } j = 1, 2$$

Denotamos de forma compacta $\mathbf{z}(p) = (z_1(p), z_2(p))$. Note que $\mathbf{z} : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$.

Teorema 2 (Propriedades da função excesso de demanda)

Se as utilidades de todos os consumidores satisfazem a Hipótese 1, então para todo $\mathbf{p} \gg 0$,

1. *Homogeneidade:* $\mathbf{z}(\lambda\mathbf{p}) = \mathbf{z}(\mathbf{p})$ *para todo* $\lambda > 0$,
2. *Lei de Walras:* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$.

Definição 4 (Equilíbrio Walrasiano)

Um vetor de preços $\boldsymbol{p}^\star \in \mathbb{R}^2_{++}$ *é chamado de equilíbrio Walrasiano se* $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^\star) = 0$.

O Teorema 2 tem duas implicações importantes e úteis para o Equilíbrio Walrasiano.

1. Homogeneidade implica que se $\boldsymbol{p}^\star$ é um vetor de equilíbrio, $\lambda\boldsymbol{p}^\star$ também será, para $\lambda > 0$, pois

$$z(\lambda\boldsymbol{p}^\star) = z(\boldsymbol{p}^\star) = 0.$$

   Isso quer dizer que em Equilíbrio Geral são os preços relativos que importam. A implicação prática é que então sempre se pode normalizar o preço de um dos bens para 1 quando procuramos um EW.

2. A Lei de Walras implica que uma das equações que compõe o sistema de equações $\boldsymbol{z}(p) = 0$ é redundante. Vejamos:

$$p_1 z_1(p_1, p_2) = -p_2 z_2(p_1, p_2)$$

Se o mercado 1 está equilibrado, $z_1(p_1, p_2) = 0$, então o mercado 2 também estará.

Exemplo 2

Seja uma economia de trocas com dois consumidores a e b, com funções utilidade iguais

$$u^i(x_{1i}, x_{2i}) = \frac{1}{3}\log(x_{1i}) + \frac{2}{3}\log(x_{2i}), \text{ para } i = a, b;$$

e dotações dos bens iniciais $e_a = (2, 3)$ e $e_b = (3, 2)$, encontre um vetor de preços e alocação de Equilíbrio Walrasiano.

Lema 1

Se a função de utilidade $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente e ao vetor de preços $\boldsymbol{p}$ a demanda é $\hat{\boldsymbol{x}}$, então para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$:

i *Se $u(\boldsymbol{x}) > u(\hat{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} > \boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}$;*

ii *Se $u(\boldsymbol{x}) \geq u(\hat{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}$.*

Teorema 3 (Primeiro Teorema do Bem-Estar Social)

Em uma economia de trocas, se a utilidade de todos os indivíduos é estritamente crescente então toda alocação de equilíbrio Walrasiano é Pareto Eficiente.

Economia de trocas puras - Segundo teorema do bem-estar

Teorema 4 (Existência do Equilíbrio Walrasiano)

Se a utilidade dos consumidores satisfaz a Hipótese 1 e $\sum_{i=a,b} e_{ij} > 0$ *para* $j = 1, 2$, *então existe pelo menos um vetor* $\boldsymbol{p}^\star$ *tal que* $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^\star) = 0$.

Teorema 5 (Segundo Teorema do Bem-Estar Social)

Considere uma uma economia de trocas $(u^i, \boldsymbol{e}_i)_{i=a,b}$ *em que a utilidade dos consumidores satisfaça a Hipótese 1 e em que* $\sum_{i=a,b} e_{ij} > 0$ *para* $j = 1, 2$.

Suponha que $\bar{\boldsymbol{x}}$ *seja uma alocação Pareto Eficiente para a economia e que as dotações iniciais sejam realocadas de forma que o novo vetor de dotações iniciais seja dado por* $\bar{\boldsymbol{x}}$, *formando a economia de trocas* $(u^i, \bar{\boldsymbol{x}}_i)_{i=a,b}$.

Então $\bar{\boldsymbol{x}}$ *é uma alocação de Equilíbrio Walrasiano da economia* $(u^i, \bar{\boldsymbol{x}}_i)_{i=a,b}$.

Corolário 1

Sob as mesmas hipóteses do Teorema 5, se $\bar{\boldsymbol{x}}$ é Pareto Eficiente, então $\bar{\boldsymbol{x}}$ é também uma alocação de Equilíbrio Walrasiano, com preços $\bar{\boldsymbol{p}}$, após uma redistribuição de dotações iniciais $\boldsymbol{e}^\star \in F(\boldsymbol{e})$ tal que:

$$\bar{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{e}_i^\star = \bar{\boldsymbol{p}} \cdot \bar{\boldsymbol{x}}_i, \text{ para todo indivíduo } i = \{a, b\}.$$

Economia de trocas puras - Extensão para I agentes e N bens

A discussão acima se estende naturalmente para o caso em que temos um conjunto $\mathcal{I}$ de agentes e $N > 2$ bens. Com essa extensão teremos:

- N bens;
- cada agente $i \in \mathcal{I}$ com utilidade $u^i(x_1, \ldots, x_N)$
- e dotações $\boldsymbol{e}^i \in \mathbb{R}^N_+$

Nessa economia os agentes resolvem:

$$\max_{x_1,\ldots,x_N} \; u^i(x_1, \ldots, x_N)$$
$$s.t. \; \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}^i$$

A definição de excesso de demanda e portanto de EW também se generalizam. Agora $\boldsymbol{z} : \mathbb{R}^N_+ \rightarrow \mathbb{R}^N_+$ e

$$\boldsymbol{z}(p) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \boldsymbol{x}^i(p) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \boldsymbol{e}^i$$

Equilíbrio Geral com Produção

Uma limitação importante do modelo anterior era a ausência de produção. Nessa seção introduzimos a ideia de equilíbrio com produção. Partimos do modelo mais simples que nos permite analisar consumo e produção em equilíbrio: a economia de Robinson Crusoé.

Na economia de Robinson Crusoé, temos apenas um consumidor, o Robinson, e uma única firma, a Crusoé Ltda, com um único acionista, o próprio Robinson.

Há dois bens na economia: peixes (um bem de consumo), denotado por c, e lazer (que pode ser vendido como trabalho ou consumido), denotado por h.

A firma Crusoé Ltda vende peixes e compra tempo (trabalho) no mercado. O Robinson compra peixes e vende sua força de trabalho no mercado.

Equilíbrio Geral com Produção - Firma

Primeiro vamos estudar o problema da Crusoé Ltda. A firma detém uma tecnologia de produção que transforma trabalho em peixes, dada por $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Representando insumos por valores negativos, as possibilidades de produção da Crusoé Ltda são dadas pelo conjunto:

$$\boldsymbol{Y} = \{(y_c, y_h) | -B \leq y_h \leq 0, 0 \leq y_c \leq f(-y_h)\}$$

Hipótese 2 (Função de produção côncava)

A função de produção $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é estritamente côncava.

O problema da firma competitiva é escolher $y \in \boldsymbol{Y}$, ou seja, produção de peixes e contratação de trabalho, de forma a maximizar seu lucro. Seja p o preço do peixe no mercado e w o salário (preço de h), a firma resolve:

$$\pi(p, w) = \max_{y_c, y_h} p y_c + w y_h$$
$$s.t. \; (y_c, y_h) \in Y$$

Equilíbrio Geral com Produção - Consumidores

O problema dos consumidores é muito parecido com o que vimos na economia de troca, manteremos, por exemplo, a Hipótese 1. A única diferença é que precisaremos incorporar o lucro da firma no problema do consumidor.

Assim como na economia de trocas, os consumidores são dotados de quantidades iniciais dos dois bens (e_c, e_h). Supomos por simplicidade que $e_c = 0$ e que o consumidor só detém uma dotação inicial de tempo $e_h > 0$.

O problema do consumidor competitivo incorporando o lucro da firma $(\pi(p, w))$ é escolher o vetor de consumo de peixes e horas de lazer (x_c, x_h):

$$\max_{x_c, x_h} u(x_c, x_h)$$
$$s.t. \;\; px_c + wx_h \leq pe_c + we_h + \pi(p, w)$$

Equilíbrio Geral com Produção - Equilíbrio Walrasiano

Definição 5 (Alocação factível com produção)

Dizemos que uma alocação (x_c, x_h, y_c, y_h) *é factível se* $(y_c, y_h) \in Y$, $(x_c, x_h) \in \mathbb{R}^2_+$ *e*

$$\begin{aligned} x_c &= e_c + y_c, \\ x_h &= e_h + y_h. \end{aligned}$$

Definição 6 (Excesso de demanda com produção)

Seja $\mathbf{x}(p, w)$ *e* $\mathbf{y}(p, w)$ *funções que resolvem os problemas do consumidor e da firma, respectivamente. A função excesso de demanda* $\mathbf{z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é dada por*

$$\begin{aligned} z_c(p, w) &= x_c(p, w) - y_c(p, w) - e_c, \\ z_h(p, w) &= x_h(p, w) - y_h(p, w) - e_h. \end{aligned}$$

Obs: O Teorema 2 continua válido na economia com produção.

Equilíbrio Geral com Produção - Equilíbrio Walrasiano

Definição 7

Assim como no EW em trocas puras, o vetor de preços de EW em uma economia com produção, $(p^\star, w^\star)$, é tal que $z(p^\star, w^\star) = 0$.

Exemplo 3

Robinson tem dotação inicial $(e_c, e_h) = (0, 1)$ e tem preferência quase-linear

$$u(x_c, x_h) = \log(x_c) + x_h$$

e a Crusoé Ltda tem função de produção:

$$f(y_h) = \sqrt{-y_h}.$$

Encontre a alocação de Equilíbrio Walrasiano dessa economia.

Equilíbrio Geral com Produção - Extensão para I consumidores, J firmas e N bens

Estendemos agora o modelo para várias firmas, vários consumidorese e vários bens:

- Firmas: $j = 1, \ldots, J$. Cada uma com possibilidades de produção Y^j.
- Consumidores: $i = 1, \ldots, I$, com utilidade u^i. Além de sua dotação inicial $e^i \in \mathbb{R}^N$ possui participação no lucro da firma j dada por θ_{ij}. Com essa extensão a restrição orçamentária aos preços p fica:

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^i \leq \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}^i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \pi^j(\boldsymbol{p}) \equiv m^i(\boldsymbol{p}).$$

Naturalmente, $\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij} = 1$ para todo $j = 1, \ldots, J$.

Equilíbrio Geral com Produção - Extensão para I consumidores, J firmas e N bens

Definição 8 (Alocação factível com produção (extensão))

Dizemos que uma alocação $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{N \times I} \times \mathbb{R}^{N \times J}$ *é factível se*

$$\sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{x}^i = \sum_{j=1}^{J} \boldsymbol{y}^j + \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{e}^i,$$

e $\boldsymbol{y}^j \in \boldsymbol{Y}^j$ *para todo* $j = 1, \ldots, J$.

Equilíbrio Geral com Produção - Teoremas do Bem-Estar

Ambos teoremas do bem-estar continuam válidos após a introdução de produção na economia, desde que as firmas se comportem de maneira competitiva, *i.e.*, tomem preços como dados (veremos na próxima seção o que ocorre caso essa hipótese seja violada). Além disso, uma hipótese implícita é a ausência de externalidades tanto no consumo quanto na produção (na última seção do curso vamos estudar esses casos com mais detalhe).

O enunciado e requerimentos do Primeiro Teorema do Bem-Estar permanecem os mesmos após a introdução de produção na economia.

Teorema 6 (Primeiro Teorema do Bem-Estar Social)

Em uma economia com produção, se a utilidade de todos os indivíduos é estritamente crescente então toda alocação de equilíbrio Walrasiano é Pareto Eficiente.

Equilíbrio Geral com Produção - Teoremas do Bem-Estar

Teorema 7 (Segundo Teorema do Bem-Estar Social com produção)

Suponha que

1. *cada* u^i *satisfaça a Hipótese 1;*
2. *cada* $\boldsymbol{Y}^j$ *seja fechado, limitado e fortemente convexo;*
3. $\boldsymbol{y} + \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{e}^i \gg 0$ *para algum* $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{J} \boldsymbol{y}^j$, *com* $\boldsymbol{y}^j \in \boldsymbol{Y}^j$ *para todo* $j = 1, \ldots, J$;
4. *a alocação* $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ *é Pareto Eficiente.*

Então existem transferências de renda $T_1, \ldots, T_I$, *em que* $\sum_{i=1}^{I} T_i = 0$ *e um vetor de preços* $\bar{\boldsymbol{p}}$ *tal que*

i. $\hat{\boldsymbol{x}}^i$ *maximiza* $u^i(\boldsymbol{x}^i)$ *tal que* $\bar{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{x}^i \leq m^i(\bar{\boldsymbol{p}}) + T_i$, *para todo* $i = 1, \ldots, I$;

ii. $\hat{\boldsymbol{y}}^i$ *maximiza* $\bar{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{y}^j$ *tal que* $\boldsymbol{y}^j \in \boldsymbol{Y}^j$, *para* $j = 1, \ldots, J$.

Mercados contingentes - Introdução

Até o momento usamos uma definição bem restritiva dos bens transacionados. O ambiente econômico era estático, enquanto muitas questões econômicas envolvem ambientes dinâmicos (com aspecto temporal relevante). As ideias discutidas até aqui se aplicam porém também a esses ambientes mais ricos. Nessa seção refinamos a noção do que é um bem para discutir questões relacionadas a

- Decisões de investimento;
- Seguros;
- Juros;
- Apreçamento de ativos (ações, títulos, etc.)

Vamos supor que haja apenas um bem físico de consumo na economia. Porém ele pode ser consumido em dois períodos distintos, hoje $t = 1$ e amanhã, $t = 2$.

Adicionamos ainda uma segunda dimensão: incerteza sobre o estado da natureza em $t = 2$.

- Existe um conjunto $S = \{1, \dots, K\}$ de estados da natureza possíveis para $t = 2$.
- A probabilidade de realização do estado $s \in S$ é dada por $q_s \in [0, 1]$. Naturalmente $\sum_{s=1}^{K} q_s = 1$.

O consumo do bem em cada possível estado da natureza será um bem diferente na economia com mercados contingentes. Temos então $K + 1$ bens nessa economia (hoje $+$ K estados contingentes amanhã).

Denotamos por x_1 o consumo do bem em $t = 1$ e por x_{2s} o consumo do bem em $t = 2$ e estado $s \in S$.

Mercados contingentes - Agente representativo

Vamos supor que existe um agente representativo na economia com função de utilidade:

$$U(x_1, x_{21}, \ldots, x_{2K}) = u(x_1) + \beta \mathbb{E}\left[u(x_{2s})\right]$$

ou de forma equivalente:

$$U(x_1, x_{21}, \ldots, x_{2K}) = u(x_1) + \beta \sum_{s=1}^{K} q_s u(x_{2s})$$

Representamos de forma análoga as dotações do agente em cada estado da natureza por $(e_1, e_{21}, \ldots, e_{2K})$.

Mercados contingentes - Problema do agente representativo

Denotando os preços dos bens contingentes por $(p_1, p_{21}, \ldots, p_{2K})$, o problema do agente representativo da economia é

$$\max_{x_1, x_{21}, \ldots, x_{2K}} u(x_1) + \beta \sum_{s=1}^{K} q_s u(x_{2s})$$
$$s.t. \;\; p_1 x_1 + \sum_{s=1}^{K} p_{2s} x_{2s} \leq p_1 e_1 + \sum_{s=1}^{K} p_{2s} e_{2s} \quad [\lambda]$$

Com CPO:

$$u'(x_1) = \lambda p_1$$
$$\beta q_s u'(x_{2s}) = \lambda p_{2s}, \text{ para todo } s \in S$$

Mercados contingentes - Equilíbrio

Re-escrevendo:

$$\beta q_s \frac{u'(x_{2s})}{u'(x_1)} = \frac{p_{2s}}{p_1} \text{ para todo } s \in S.$$

Primeiro note que pelo Teorema 2 (que continua válido!), podemos normalizar o preço do bem em $t = 1$ para 1.

Note que, como na economia temos apenas o agente representativo, *market clearing* em todos os mercados implica que

$$x_1 = e_1, x_{2s} = e_{2s}, \ \forall s \in S.$$

Os preços de EW da economia com mercados contingentes e agente representativo são então dados por:

$$p^{\star}_{2s} = \beta q_s \frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)} \text{ para todo } s \in S. \tag{1}$$

Mercados contingentes - Ativos de Arrow

Definição 9 (Ativo de Arrow)

Um ativo de Arrow para a data t e estado contingente s paga uma unidade do bem na data t e estado s para o detentor do ativo e nada caso contrário.

Qual deve ser o preço em equilíbrio de um ativo de Arrow?

- Para que não haja possibilidade de arbitragem, o preço do ativo de Arrow deve ser o mesmo que o preço do seu respectivo bem contingente, $p^{\star}_{2s}$, como definido na equação (1).

O ativos de Arrow formam um conjunto fundamental de ativos. Todos os ativos da economia podem ser escritos como uma combinação linear dos ativos de Arrow.

Definição 10 (Ativo livre de risco)

Um ativo livre de risco paga em $t = 2$ uma unidade do bem de consumo em todos os estados da natureza $s \in S$.

Qual o preço deve vigorar em mercado para o ativo livre de risco? Note que possuir 1 unidade desse ativo equivale a possuir uma unidade de todos os ativos de Arrow para a data 2. Então o preço do ativo livre de risco em unidades do bem corrente é dado por

$$p_f = \sum_{s=1}^{K} p_{2s}^{\star} = \beta \sum_{s=1}^{K} q_s \frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)} = \beta \mathbb{E}\left[\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)}\right].$$

Definição 11 (Estrutura de pagamento dos ativos na economia)

Representamos a estrutura de pagamento dos ativos da economia por uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^J$. *A entrada* (i,j) *de* $\boldsymbol{A}$ *representa quanto o ativo* j *paga no estado contingente* i.

Podemos então escrever então o fluxo de pagamentos contingentes em cada estado da natureza, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^K$, de um portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^J$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1J} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KJ} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_J \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{h}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}$$

Mercados contingentes - Apreçamento de ativos

E no caso de um ativo arriscado, uma ação por exemplo, que paga dividendo d_s em cada estado da natureza $s \in S$?
Carregar essa ação é equivalente a carregar d_s unidades do ativo de Arrow s. O preço da ação para que não haja arbitragem deve ser:

$$p_r = \sum_{s=1}^{K} d_s p_{2s}^{\star} = \beta \sum_{s=1}^{K} q_s d_s \frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)} = \beta \mathbb{E}\left[\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)} d_s\right] \tag{2}$$

Resultado 1 (Covariância)

Sejam Y e Z variáveis aleatórias,

$$Cov(Y, Z) = \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z].$$

Podemos usar o Resultado 1 para re-escrever (2) como

$$p_r = \beta \left(Cov \left(\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)}, d_s \right) + \mathbb{E}\left[\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)} \right] \mathbb{E}\left[d_s \right] \right).$$

Usando a expressão para o preço do ativo livre de risco obtemos:

$$p_r = p_f \mathbb{E}\left[d_s \right] + \beta Cov \left(\frac{u'(e_{2s})}{u'(e_1)}, d_s \right),$$

que é uma versão alternativa de um modelo para apreçamento de ativos conhecido por CCAPM, de *Consumer Capital Asset Pricing Model*.

Mercados contingentes - Quebrando a hipótese de agente representativo

Exemplo 4 ($K = 2$, 2 agentes)

Suponha que tenhamos dois períodos, 2 estados da natureza equiprováveis para o segundo período e dois agentes a e b. As dotações dos agentes são dadas por

$$(e_{a1}, e_{a21}, e_{a22}) = (1, 0, 2),$$
$$(e_{b1}, e_{b21}, e_{b22}) = (1, 2, 0).$$

Suponha ainda que as preferências dois dois agentes sejam iguais e dadas por

$$u_a(x_1, x_{21}, x_{22}) = u_b(x_1, x_{21}, x_{22}) = u(x_1) + \beta \mathbb{E}\left[u(x_{2s})\right].$$

Encontre os preços dos ativos de Arrow e as trocas realizadas nessa economia.