Monitoria A2

Economia Monetária e Financeia

EPGE - FGV

24 de outubro de 2019

Modelo Clássico de Crescimento

Problema do Planejador

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\}$$

restrito ao conjunto definido por

$$\begin{aligned} c_t \geq 0, k_{t+1} \geq 0 \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ c_t + k_{t+1} \leq f(k_t) + (1-\delta)k_t \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ k_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

- Suponha que $\delta = 1$

Modelo Clássico de Crescimento

Problema do Planejador

Reescrevendo o problema

$$\max_{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \right\}$$

restrito ao conjunto definido por

$$k_{t+1} \in \Gamma(k_t) = [0, f(k_t)] \quad , \quad \forall t \geq 0$$
$$k_0 \text{ dado}$$

Modelo Clássico de Crescimento

Formulação Recursiva

Reescrevendo o problema

$$v(k) = \max_{k' \in \Gamma(k)} \left\{ u(f(k) - k') + \beta v(k') \right\}$$

em que $\Gamma(k) = [0, f(k)]$.

$k' = g(k)$ função política.

Modelo Clássico de Crescimento

Algoritmo

1. Carregamos todos os parâmetros e funções do *environment* .
2. Definimos um grid para a variável de estado: k, capital.
3. Criamos chutes iniciais para V e Gk e Gc, respectivamente função valor e função políticas. Também definimos TV.
4. Definimos limites de tolerância para nosso código: ε pequeno e *itmax* grande. Declaramos também um erro grande inicial $d = 1$, e iteração $it = 0$.
5. Enquanto $d < \varepsilon$ e $it \leq itmax$.
6. Para cada valor de estado k
   - para cada k' do grid, computamos c e $u(c) + \beta V(k')$.
   - Dentre todos os k', calculamos TV (máximo entre todos). E guardamos a função politica em G.
   - Calculamos $d = |TV - V|$, atualizamos V ($V = TV$).
   - Se $d < \varepsilon$ ou as iterações chegaram a *itmax* paramos o código, caso contrário voltamos ao passo 5.
7. Uma vez que convirja, achamos $V^*(k)$ tq $TV^* = V^*$. Basta recuperar as respectivas funções políticas de acordo com a posição guardada no loop das iterações.

Modelo Clássico de Crescimento Estocástico

Problema do Planejador

Consideramos agora $f(k_t, z_t) = z_t k_t^{\alpha}$, em que z_t é um processo estocástico que segue uma cadeia de Markov tal que $P(z_t = \bar{z} | z_{t-1} = \bar{z}) = \xi$ e $P(z_t = \underline{z} | z_{t-1} = \underline{z}) = \zeta$.

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\}$$

restrito ao conjunto definido por

$$\begin{aligned} c_t \geq 0, k_{t+1} \geq 0 \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ c_t + k_{t+1} \leq f(k_t, z_t) + (1-\delta)k_t \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ k_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

- Suponha que $\delta = 1$

Modelo Cláassico de Crescimento Estocástico

Problema do Planejador

Reescrevendo o problema

$$\max_{k_{t+1}{}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t, z_t) - k_{t+1})$$

restrito ao conjunto definido por

$$k_{t+1} \in \Gamma(k_t, z_t) = [0, f(k_t, z_t)] \forall t \geq 0 \quad k_0 > 0 \text{dado}$$

Modelo Clássico de Crescimento Estocástico

Formulação Recursiva

Reescrevendo o problema

$$v(k,z) = \max_{k' \in \Gamma(k,z)} \left\{ u(f(k) - k') + \beta \sum_{z'} \pi_{zz'} v(k', z') \right\}$$

em que $\Gamma(k,z) = [0, f(k,z)]$.
$k' = g(k)$ função política.

K&W
Enviroment

Considere uma economia descrita pelo seguinte ambiente:

- O tempo é infinito e discreto. $t = 1, 2, \ldots$
- Existem infinitas pessoas na economia, com medida normalizada para 1. Estas pessoas vivem eternamente e descontam o futuro de acordo com o fator $\beta \in (0, 1)$.
- As pessoas são divididas igualmente entre $N > 2$ grupos. As pessoas do grupo n consomem o bem que as pessoas do grupo $n + 1$.
- As pessoas são anônimas, ou seja, não é possível recordar as ações passadas de cada uma das pessoas.
- A utilidade de uma pessoa é dada por $u(x) - y$, em que x/y é a quantidade de produto que a pessoa consome/produz. Além disso, $u'' < 0 < u'$, $u(0) = 0$ e u satisfaz as condições de Inada.

K&W

Enviroment

- O produto é perecível, ou seja, não pode ser levado de um período para o outro.
- Não existe um mercado nessa economia. As pessoas devem procurar outra pessoa para fazer trocas.
- A cada período uma pessoa encontra apenas um outra pessoa e isso ocorre de forma aleatória.
- Existem objetos indivisíveis e perfeitamente duráveis que chamaremos de moeda. Ninguém possui utilidade de consumir moeda.
- Cada pessoa consegue carregar no máximo uma unidade de moeda e a quantidade de moeda é observável quando ocorre o encontro entre duas pessoas.

Processo de Trocas

Não há dupla coincidência de interesses em nenhum dos encontros, isto é, não existe encontro em que uma pessoa produz o bem que a outra consome e vice-versa.

Então, para convencer outra pessoa a produzir é preciso entregar algo de valor em troca. O único mecanismo que dispomos é trocar moeda por produto. Por que moeda seria aceita se ninguém possui utilidade sobre ela?

Processo de Trocas

Definições

Vamos olhar apenas equilíbrios estacionários e simétricos, ou seja, as alocação se repetem no tempo e não dependem do grupo das pessoas. Definição formal:

Definition

Uma alocação (m, y) é simétrica se a quantidade média de moeda m de cada tipo é igual, e $y \in \mathbb{R}_+$ (quantidade transacionada de produto) não depende dos tipos. Ou seja, não há discriminação de tipos.

Definition

Uma alocação (m, y) é estacionária se, fixado $m \in [0, 1]$, y não varia ao longo do tempo, ou seja, a alocação não é em função do tempo.

Função Payoff

Seja m a fração das pessoas da economia que possui moeda. Vamos descrever o payoff das pessoas da economia. Seja V_0 a função valor dos indivíduos que não possuem moeda e V_1 função valor dos indivíduos que possuem moeda:

$$V_0 = \frac{1}{N}m[-y + \beta V_1] + \left(1 - \frac{1}{N}m\right)\beta V_0$$

onde $\frac{1}{N}m$ é a probabilidade de encontrar alguém do grupo que ele conseguiria vender ($\frac{1}{N}$) e esta pessoa tenha moeda (m).

$$V_1 = \frac{1}{N}(1-m)[u(y) + \beta V_0] + \left(1 - \frac{1}{N}(1-m)\right)\beta V_1$$

onde $\frac{1}{N}(1-m)$ é a probabilidade de encontrar alguém do grupo que ele conseguiria comprar o produto ($\frac{1}{N}$) e esta pessoa não tenha moeda (m), logo, vai querer vender o produto e adquirir moeda.

Equações de Bellman

Com algum algebrismo escrevemos as equações de Bellman associadas a esse modelo:

$$V_0 = \beta V_0 + \frac{1}{N} m[-y + \beta(V_1 - V_0)]. \tag{1}$$

$$V_1 = \beta V_1 + \frac{1}{N}(1 - m)[u(y) - \beta(V_1 - V_0)], \tag{2}$$

Incentivos e Bem-estar

Restrições de Participação

Tanto consumidor quanto produtor precisam concordar com a troca que será feita. Dessa forma, as trocas ocorrerão sempre que:
Produtor:

$$-y + \beta V_1 \geq \beta V_0 \Leftrightarrow y \leq \beta(V_1 - V_0). \tag{3}$$

Consumidor:

$$u(y) + \beta V_0 \geq \beta V_1 \Leftrightarrow u(y) \geq \beta(V_1 - V_0). \tag{4}$$

Definition

Uma alocação é compatível a incentivos se satisfaz (3) e (4), restrições de compatibilidade de incentivos do produtor e do consumidor, respectivamente.

Incentivos e Bem-Estar

Critério de Bem-Estar

Vamos utilizar o critério de bem-estar dado pela média ponderada dos grupos. Dessa forma, o bem-estar da economia, W, é dado por

$$W = mV_1 + (1 - m)V_0.$$

É possível mostrar que

$$W = \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{N}m(1-m)[u(y) - y]. \tag{5}$$

Problema do Planejador

Agora que já possuímos informações sobre os objetos da economia e entendemos que os incentivos das pessoas devem ser respeitadas, podemos descrever o problema do planejador social

$$\max_{y,m} W \qquad s.a. \ (3), (4). \tag{6}$$

Definition

Uma alocação ótima resolve o problema do planejador sujeito as restrições (1)-(4), $m \in [0, 1]$ e $y \in \mathbb{R}_+$.

Problema do Planejador

Irrelevância da Restrição do Consumidor

É possível mostrar que (3) $\Rightarrow$ (4).

Por (3):

$$y \leq \beta(V_1 - V_0) \Rightarrow^{y \in \mathbb{R}_+} \quad 0 \leq y \leq \beta(V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow \beta(V_1 - V_0) \geq 0 \Rightarrow V_1 \geq V_0$$

Por (6) e pelo resultado acima:

$$(1-\beta)V_0 = \frac{m}{N}(-y + \beta(V_1 - V_0)) \geq 0 \Rightarrow V_0 \geq 0$$

Logo, $V_1 \geq V_0 \geq 0$

Por (7):

$$(1-\beta)V_1 = \frac{1-m}{N}[u(y) - \beta(V_1 - V_0)] \geq 0 \Rightarrow u(y) \geq \beta(V_1 - V_0)$$

e obtivemos (4).

Utilizamos apenas a restrição do produtor no problema do planejador

Problema do Planejador

Restrição do Produtor em função das variáveis endógenas

Utilizando as equações de V_0 e V_1 podemos reescrever (3): (fazendo (2)-(1))

$$V_1 - V_0 = \beta(V_1 - V_0) + \frac{1}{N}[(1-m)u(y) - my] - \frac{1}{N}\beta(V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow (V_1 - V_0)\left[1 - \beta\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right] = \frac{1}{N}[(1-m)u(y) - my]$$

$$\beta(V_1 - V_0)[N - \beta N + \beta] = \beta[(1-m)u(y) - my]$$

Como $y \leq \beta(V_1 - V_0)$:

$$y[N - \beta N + \beta] \leq \beta(V_1 - V_0)[N - \beta N + \beta] = \beta[(1-m)u(y) - my]$$

$$\Rightarrow y[N - \beta N + \beta] \leq \beta[(1-m)u(y) - my]$$

Problema do Planejador

Restrição

Colocando $u(y)$ em evidência:

$$u(y) \geq \left[\frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)} + 1\right] y. \tag{7}$$

Esta restrição define, dados N, m e β, um produto $\bar{y}$, tal que se $y \in [0, \bar{y}]$, então y é compatível em incentivos.

Definindo

$$\alpha(m) = \frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)} + 1$$

N e β são exógenos, e fixando m obtemos y que satisfaz a restrição. Tal formulação nos ajuda quando comparamos ao ótimo do modelo irrestrito.

Problema do Planejador

Por fim, reescrevemos o problema do planejador.
Por (6):

$$\frac{V_0}{m} = \frac{1}{N(1-\beta)}[-y + \beta(V_1 - V_0)]$$

Por (7):

$$\frac{V_1}{1-m} = \frac{1}{N(1-\beta)}[u(y) - \beta(V_1 - V_0)]$$

Logo,

$$mV_1 + (1-m)V_0 = \frac{m(1-m)}{N(1-\beta)}[u(y) - \beta(V_1 - V_0) - y + \beta(V_1 - V_0)]$$

Problema do Planejador

E o problema do planejador:

$$\max_{y,m} \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{N}m(1-m)[u(y)-y] \tag{8}$$

$$s.a. \quad u(y) \geq \left[\frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)}+1\right]y.$$

Para entender um pouco mais do modelo, é preciso estudar a solução do problema relaxado (sem a restrição do produtor), como essa solução pode não ser factível e como é solução do problema quando a restrição é ativa.

Problema do Planejador

Soluções

A solução do problema relaxado é dada pelo par $(y^*, m^*) = (u'^{-1}(1), 1/2)$.

O solução do modelo quando a restrição do produtor é ativa é dada por (y^s, m^s), em que $y^s < y^*$ e $m^s < m^*$.

Definindo $\bar{y}$ tal que $u(\bar{y}) = \alpha(1/2)\bar{y}$.
É fácil verificar que y^* é alcançável de modo que a restrição estará sendo satisfeita com desigualdade estrita. (Gráfico)

Método da Função Penalidade

Motivação

- Otimização sujeito a restrições
- Lagrangeano
- Desenho de mecanismos
  - Principal-Agente
  - Ótimo social
- Estimação

Vamos estudar o método por meio de um exemplo.

Método da Função Penalidade

Ambiente físico

- Tempo discreto
- Cada indivíduo vive por 2 períodos ($t \in \{1, 2\}$)
- Dotação: $w_1 = w$ e $w_2 = 0$
- Taxa de juros $R = 1$
- Em $t = 1$ escolhe (c_1, s)

$$c_1 + s \leq w$$

- Em $t = 2$ escolhe (c_2, b)

$$c_2 + b \leq s$$

Método da Função Penalidade
Ambiente físico

Preferências

$$U(c_1, c_2, b) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

em que $\beta \in (0, 1)$ e u é bem comportada

Poupança Limitada:

- indivíduos viajam entre os 2 períodos
- capacidade limitada tranporte de riqueza: $\bar{s} > 0$

$$s \leq \bar{s}$$

Método da Função Penalidade

Problema do indivíduo

$$U(c_1, c_2, b) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

- não há motivação para herança

$$b^* = 0$$

- $u'(c) > 0$ para todo $c \geq 0$ implica que

$$c_2^* = s$$

$$c_1^* = w - s$$

- $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$ implica que

$$s^* \in (0, w) \text{ para todo } w > 0$$

Portanto,

$$V(w) = \max\{u(w - s) + \beta u(s); s \in (0, w) \text{ e } s \leq \bar{s}\}$$

Método da Função Penalidade

Método numérico

Considere o lagrangeano

$$L(s,\lambda) \equiv u(w-s) + \beta u(s) + \lambda(\bar{s}-s)$$

- $\lambda \geq 0$: multiplicador associado a restrição
- se $(\tilde{s},\tilde{\lambda})$ é tal que

$$\frac{\partial L}{\partial s}(\tilde{s},\tilde{\lambda}) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}(\bar{s}-\tilde{s}) = 0,$$

então $\tilde{s} = s^*$

Objetivo: calcular $\tilde{\lambda}$ e então obter $\tilde{s} = s^*$

- otimização contínua
- iteração multiplicador de lagrange (penalidade)

Método da Função Penalidade

Algoritmo

(i) $i = 1$

(ii) palpite (chute inicial) $\lambda_i = \lambda_1 > 0$ para $\tilde{\lambda}$

(iii) cálculo de

$$s_i \equiv \arg\max_s \{L(s, \lambda_i)\}$$

(iv) ajuste do multiplicador

$$\lambda_{i+1} \equiv \lambda_i a^{-(\bar{s} - s_i)}$$

- $a > 1$, em geral, $a = e$.

(v) se $\lambda_{i+1} \neq \lambda_i$

- atualize $i = i + 1$
- retorne ao passo (*iii*)

(vi) se $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, finalize.

Método da Função Penalidade

Algoritmo K&W

Achar λ^* talque a restrição seja ativa em que

$$(m, y^*) \in \arg\max_{(m,y)} L(m, y, \lambda)$$

1. $i = 1$
2. chute inicial $\lambda_i = \tilde{\lambda} > 0$
3. Calcule
$$(m_i, y_i) \in \arg\max_{(m_i,y_i)} L(m, y, \tilde{\lambda})$$
4. Ajuste do multiplicador
$$\lambda_{i+1} \equiv \lambda_i a^{-\gamma_i}$$
onde $\gamma_i = \left[u(y_i) - \dfrac{N(1-\beta)}{\beta(1-m_i)} + 1\right] y_i$ e $a > 1$
5. Checagem: se $\lambda_{i+1} \neq \lambda_i$
   - atualize $i = i + 1$
   - <u>retorne</u> ao passo (3)
6. se $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, <u>finalize</u>.

Diamond-Dibvyq 1983

- Explicação de como bancos sujeito a corridas podem atrair depósitos.
- "Demand deposit contracts" não assegurados permitem liquidez (podem levar a aloações superioes à autarquia) mas deixam os bancos vulneráveis a corridas. Resultados do modelo:
  - Tais contratos ao serem oferecidos pelos bancos podem melhorar o mercado competitivo - promove compartilhamento de risco entre agentes que preferem consumir em períodos diferentes,
  - Possui um equilíbrio ruim - corrida bancária
- Foco em corrida bancária e prevenção da mesma.

Outline

D&D without Aggregate Risk

Ambiente Econômico - Consumidores

- Existem 3 períodos: $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.
- Contínuo de indivíduos com medida 1.
- Um único bem perecível.
- Em $t = 0$, todas as pessoas são iguais e possuem uma unidade do bem.
- Cada um enfrenta um risco (não assegurado) de ser do tipo $\theta = 1$ (impaciente) e do tipo $\theta = 2$ (paciente). $\theta \in \Theta$.
- Em $t = 1$, indivíduos aprendem sobre o seu tipo - informação privada.

D&D without Aggregate Risk

Ambiente Econômico - Tecnologia e Intermediação

Tecnologia: Permite transformar k unidades em $t = 1$ em Rk unidades em $t = 2$, com $R > 1$. Os depósitos são realizados em $t = 0$. É possível fazer o resgate em $t = 1$, mas sem nenhum acréscimo.

Intermediários: Tem acesso a tecnologia

- Em $t = 0$, indivíduos depositam seus recursos junto ao intermediário.
- Em $t = 1$ intermediário organiza uma fila e distribui alocações para as pessoas que se declarem impacientes.
- Em $t = 2$, os recursos que não forem utilizados para pagamentos em $t = 1$ serão devolvidos para os pacientes da economia (com rendimentos).

D&D without Aggregate Risk

Economy

Em $t = 1$, indivíduos recebem choque: com probabilidade p elá terá urgência pelo consumo ($\theta = 1$) e com probabilidade $1 - p$ pode optar por consumir tanto no presente quanto no futuro ($\theta = 2$). p e $1 - p$ são de *common knowledge*

Seja c_i a quantidade consumida em $t = i$, as utilidades serão dadas por:

- utilidade do impaciente: $u(c_1)$
- utilidade do paciente: $\rho u(c_1 + c_2)$, $1 \geq \rho > R^{-1}$.

Então, utilidade esperada em $t = 0$ será dada por:

$$\mathbb{E}_\theta = pu(c_{11}) + (1 - p)\rho u(c_{12} + c_{22})$$

onde c_{ik} é o consumo em $t = i$, do indivíduo do tipo k.

D&D without Aggregate Risk

Competitive Solution

Em $t = 0$, todos agentes são identicos e investem suas dotações na tecnologia. Em cada período existe um mercado competitivo nos quais os indivíduos reinvidicam consumo.

$$c_{11} = 1$$

$$c_{12} = c_{21} = 0$$

$$c_{22} = R$$

(Solução sem intermediação/Autarquia)

D&D without Aggregate Risk

Social Optimal

Problema de otimização do bem-estar médio dos agentes:

$$\max_{c_{11},c_{12},c_{21},c_{22}} \; pu(c_{11}) + (1-p)\rho u(c_{12}+c_{22}) \tag{9}$$

$$s.a. \qquad p(c_{11}+c_{21}/R) + (1-p)(c_{12}+c_{22}/R) \leq 1$$

$$c_{ik} \geq 0, \quad \forall i, k$$

Social Optimal Risk Sharing

Assumindo $\rho R > 1$, contrato satisfaz:

$$c_{12}^* = c_{21}^* = 0$$

$$u'(c_{11}^*) = \rho R u'(c_{22}^*)$$

$$p c_{11}^* + (1-p) c_{22}/R = 1$$

com $1 < c_{11}^* < c_{22}^* < R$.

D&D

Demand Deposit Contracts

- Dá a cada agente direito de retirar r_1 por unidade de investimento em $t = 1$.
- Serviço é sequencial e a retirada é condicional a solvência do banco.

Sequential service constraint: *"a bank's payoff to any agent can depend only on the agent's place in line and not on future information about agents behind him in line".* (Serviço sequencial considerado por D&D em seu paper original).

D&D

Demand Deposit Contracts

Seja V_1 payoff de quem retira em $t = 1$ - depende da sua posição na fila; e seja V_2 o payoff em $t = 2$ de quem não retira em $t = 1$ - depende do total de retiradas em $t = 1$.

$$V_1(f_j, r_1) = \begin{cases} r_1 & \text{se} \quad f_j < r_1^{-1} \\ 0 & \text{se} \quad f_j \geq r_1^{-1} \end{cases}$$

e

$$V_2(f, r_1) = \max\left\{ \frac{R(1 - r_1 f)}{1 - f}, 0 \right\}$$

onde f_j é o número de retiradas até o agente j; e f é a proporção de indivíduos que retiraram em $t = 1$.

- se $r_1 > 1$, depósitos à vista dão seguro contra choque de liquidez
- Entretetanto, cria potencial para corrida bancária.

D&D without aggregate risk

Equilibrium

Temos dois NE:

1. Perfil de estratégias simétrico: **saco em $t = 1$ sse sou impaciente**
   contrato de depósito à vista implementa FB
   - $r_1 = c_{11}^*$.
   - $c_{22}^* = \max\left\{\frac{R(1-r_1 f)}{1-f}, 0\right\}$.
   - $c_{11}^* < c_{22}^* \Rightarrow$ alocação ótima é compatível à incentivos

2. Perfil de estratégias simétrico: **todos retiram em** $t = 1$. Corrida bancária
   - $r_1 > 1$ e todos decidem sacar
   - bancos ficarão sem reservas $\max\left\{\frac{R(1-r_1 f)}{1-f}, 0\right\}$.
   - serviço de liquidez leva a corrida.

D&D
Suspensão de Pagamentos

- Contrato prevê retirada r_1 em $t = 1$ até p consumidores.
- Depois de p suspende pagamentos.
- Garante que em $t = 2$ terá pagamentos, e como $c_{22}^* > c_{11}^*$, paciente irá esperar.

Problema: Banco precisa conhecer p.

D&D
Seguro Depósito

- Seguros depósito poderia dar a garantia necessária para pacientes esperarem.
- Para garantir seguro, o governo deve taxar.
- Capacidade de taxar é o que poderá tornar essa política efetiva.
- Assumindo que a taxação possa ser condicional a quantidade de retiradas, governo poderia desfazer a restrição de serviço sequencial.
- Ótimo poderia ser alcançado.

D&D

Resultados Gerais

- Presença de informação privada faz com que o ótimo não seja alcançavel em um equilíbrio competitivo.
- FB pode ser alcançado como um NE superior a partir de organização bancária.
- NE não é único. Há possibilidade de corrida bancária - motivada pelo serviço de liquidez.
- Mecanismos que podem impedir corrida: Suspensão de pagamentos e Seguro Depósito.

Outline

D&D with Sequential Sevice Taken Seriously - Wallace

- Aponta falha de D&D no modo que trata a restrição de serviço sequencial (essencial para explicar a iliquidez do sistema bancário).
- Medidas adotas para evitar corrida não funcionam na presença de risco agregado e serviço sequencial.
- Pessoas são isoladas uma das outras (não podem realizar trocas) mas estão em contato os bancos.
- Modelo com ênfase no serviço sequencial, as retiradas serão contingentes à informação adquirada até o momento (abordagem por desenho de mecanismos).

D&D with Aggregate Risk
Economy

- A economia é a mesma descrita anteriormente, com a mesma tecnologia, mas agora temos temos N agentes. (Se N é suficientemente grande $\Rightarrow$ caso anterior).
- Indivíduos possuem dotação: e
- Não é possível saber a qual o número de pessoas pacientes/impacientes (risco agregado).
- O Banco deve perguntar para as pessoas qual o tipo (de choque) de cada pessoa.
- No período 1, as pessoas estão isoladas de modo que não podem transacionar seus depósitos.

D&D
Preferências

Agente impaciente:

$$Au(c_1)$$

Agente paciente:

$$u(c_1 + c_2)$$

u é bem comportada

D&D

Serviço Sequencial

Intermediação

- $t = 0$: indivíduos depositam suas dotações no banco.
- $t = 1$: uma fila é formada, em que cada pessoa recebe aleatoriamente uma posição, o banco acessa cada pessoa de forma a descobrir quantos se tornaram impacientes e depois distribui as alocações dos impacientes.
- $t = 2$: distribui-se as alocações dos pacientes.

Filas: acesso sequencial - posição i com probabilidade $1/N$; serviço por ordem de chegada. (first-come, first-served)

Posição na fila: podem saber ou não. Banco

- diz qual é a posição na fila (**Disclosed**) - Green and Lin
- não diz qual a posição (**Undisclosed**) - Peck and Shell.

D&D
Estrutura Informacional

Cada pessoa reporta seu tipo quando acessada pelo banco.

$$\omega_i = \begin{cases} 0, & \text{se impaciente} \\ 1, & \text{se paciente} \end{cases} \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}. \quad (10)$$

A informação é privada: somente i conhece ω_i.

Estado agregado da economia será um vetor:

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega = \{0, 1\}^N.$$

Apesar de não conseguirmos identificar a relação de pacientes e impacientes exata, podemos calcular a probabilidade de cada estado possível ocorrer.

$$P(\omega) = p^{N-|\omega|}(1-p)^{|\omega|}, \text{ em que } |\omega| = \sum_{i=1}^{N} \omega_i.$$

D&D
Alocação

Alocação (dependente dos estados): Um plano de consumo (distribuição de consumo) $\{x_i, y_i\}_{i,\omega}$ tal que $x_i, y_i : \Omega \to \mathbb{R}_+$.

Assumindo especialização (impaciente só consome em $t = 1$ e paciente em $t = 2$), temos, $x_i(\omega_{-i}, 1) = 0$ e $y_i(\omega_{-i}, 0) = 0$.

Restrição de factibilidade: (x, y) é factível se,

$$\sum_{i=1}^{N} \left((1-\omega_i)\, x_i\left(\omega^{i-1}, 0\right) + \omega_i R^{-1} y_i(\omega)\right) \leq Y, \quad \forall \omega$$

D&D

Factibilidade no Serviço sequencial

Serviço Sequencial: Uma alocação (x, y) satisfaz o serviço sequencial se,

$$x_i(\omega) = x_i(\tilde{\omega}), \quad \forall \omega, \tilde{\omega} \in \Omega, \text{t.q} \quad \omega^i = \tilde{\omega}^i$$

onde , $\omega^i \in \{0,1\}^i$ é a sequência truncada do estado agregado nas i primeiras coordenadas.

Como assumimos especialização, precisamos definir apenas $x_i(\omega^{i-1}, 0)$ para cada i (posição) e cada ω^{i-1} (possíveis ocorrências até i). Portanto,
Factibilidade com SS (x, y) is *factível* se:

$$\sum_{i=1}^{N} \left((1 - \omega_i)\, x_i \left(\omega^{i-1}, 0 \right) + \omega_i R^{-1} y_i(\omega) \right) \leq Y, \quad \forall \omega$$

D&D
Welfare

Função de Bem Estar: utilidade esperada dos agentes ex-ante:

$$E_{i,\omega}[u(x_i(\omega) + \omega_i y_i(\omega))A^{1-\omega_i}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_\omega[u(x_i(\omega) + \omega_i y_i(\omega))A^{1-\omega_i}]$$

E pela especialização:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_\omega\Big((1-\omega_i)\, Au\left(x_i\left(\omega^{i-1}, 0\right)\right) + \omega_i u\left(y_i\left(\omega\right)\right) \Big)$$

D&D
Compatibilidade de Incentivos

Implementabilidade com posição revelada:(x, y) é IC se é factível e

$$E_\omega \left[u \left(y_i \left(\omega_{-i}, 1 \right) \right) | \omega_i = 1 \right] \geq E_\omega \left[u \left(x_i \left(\omega^{i-1}, 0 \right) \right) | \omega_i = 1 \right]$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Implementabilidade sem saber sua posição: (x, y) é IC se é factível e

$$\frac{1}{N} \sum_i E_i \left[u \left(y_i \left(\omega_{-i}, 1 \right) \right) | \omega_i = 1 \right] \geq \frac{1}{N} \sum_i E_i \left[u \left(x_i \left(\omega^{i-1}, 0 \right) \right) | \omega_i = 1 \right]$$

(toma o valor esperado sobre todas as possíveis posições em que o agente possa se encontrar)

Diamond-Dibvyg Model

Optimal Allocation Without SS

A alocação ótima é dada pela solução:

$$\max \frac{1}{N} E_\omega \sum_{i=1}^{N} \Big(\left(u \left(x_i(\omega) \right) + \omega_i y_i \left(\omega \right) \right) A^{1-\omega_i} \Big)$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\left(1 - \omega_i \right) x_i(\omega) + \omega_i R^{-1} y_i(\omega) \right) \leq Y \quad \forall \omega$$

Solução requer que

$$x_i(\omega) = x(\omega) = x(\tilde{\omega})$$

$$y_i(\omega) = y(\omega) = y(\tilde{\omega})$$

$\forall \omega, \tilde{\omega}, \text{tq} \quad |\omega| = |\tilde{\omega}|$.

FB: Pagamento antecipado não dependeria da posição da fila, apenas do estado agregado. Não tem serviço sequencial - planejador observas todos os tipos e escolhe a alocação. (Olhar modelo sem serviço sequencial da graduação).

Diamond-Dibvyg Model

Optimal Allocation With SS - P&S

A alocação ótima é dada pela solução:

$$\max \frac{1}{N} E \sum_{i=1}^{N} \Big(\left(1-\omega_i\right) Au\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right) + \omega_i u\left(y_i\left(\omega\right)\right) \Big)$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\left(1-\omega_i\right) x_i\left(\omega^{i-1},0\right) + \omega_i R^{-1} y_i(\omega)\right) \leq Y \quad \forall \omega$$

FB: Solução requer que suspenção parcial de pagamentos (contingenciar pagamentos ao número de impacientes) (Olhar modelo com serviço sequencial da graduação)

D&D

Mecanismo Ótimo

Considerando o problema do planejador sujeito as possíveis restrições de compatibilidade de incentivos, teremos:

- Se considerarmos o problema em que os indivíduos não sabem sua posição (P&S) haverá um outro equilíbrio de corrida bancária. Múltiplos equilíbrios.
- Assumindo que os indivíduos sabem sua posição (GL) o equilíbrio bom (sem corrida) é único. IC não é ativa, TT é o único equilíbrio de Nash.
- Há também um terceiro caso no qual os indivíduos sabem sua posição e os anúncios anteriores. O equilíbrio bom também será único.

D&D

Estrutura Recursiva

Otimalidade na data-2: problema do planejador após a história ω, e pagamentos já realizados em $t = 1$:

$$\max_{y} \left\{ \sum_i \omega_i u(y_i), \quad \text{s.a} \sum_i \omega_i y_i \leq Ra \right\}$$

onde a são os recursos que restaram após os pagamentos em $t = 1$.

Solução: tratando todos os pacientes de forma igual, a solução ótima é dada por

$$y_i = y = \frac{Ra}{|\omega|}$$

.

A utilidade implicada pelas reservas a dada história ω será:

$$V_N(a, \omega) = |\omega| u \left(\frac{Ra}{|\omega|} \right)$$

D& D
Formulação Recursiva

Reescrevendo o problema original:

$$\max \sum_{i=1}^{N} E_\omega \left\{(1-\omega_i)u(x_i(\omega^{i-1},0))\right\} + E_\omega V_N(a(\omega),\omega)$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{N} \left((1-\omega_i)\, x_i\left(\omega^{i-1},0\right) + a(\omega)\right) \leq Y \quad \forall\omega$$

D& D

Formulação Recursiva

Supondo que podemoas reescrever o problema original para cada posição k:

$$\max \sum_{i=1}^{k} E_{\omega^k} \left\{ 1 - \omega_i u(x_i(\omega^{i-1}, 0)) \right\} + E_{\omega^k} V_N(a(\omega^k), \omega^k)$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{k} \Big((1 - \omega_i)\, x_i \left(\omega^{i-1}, 0\right) + a(\omega^k) \Big) \leq Y \quad \forall \omega^k$$

Na N-ésima posição da fila, sobraram a reservas e m se declararam pacientes.
O problema do planejador é maximizar o consumo do último cara da fila caso ele seja paciente ou atingir o valor ótimo e alterando para $m + 1$ pacientes.

D& D
Formulação Recursiva

Reescrevemos o problema como:

$$\max \sum_{i=1}^{k-1} E_{\omega^{k-1}} \left\{1 - \omega_i u(x_i(\omega^{i-1}, 0))\right\} + E_{\omega^{k-1}} V_N(a(\omega^{k-1}), \omega^{k-1})$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{k-1} \Big((1-\omega_i)\, x_i \left(\omega^{i-1}, 0\right) + a(\omega^{k-1})\Big) \leq Y \quad \forall \omega^{k-1}$$

onde

$$V_{k-1}(a, \omega^{k-1}) \equiv \max_{x, a_0, a_1} P(\omega_i = 1 | \omega^{k-1} V_k(a_1, (\omega^{k-1}, 1)) + P(\omega_1 = 0 | \omega^{k-1})[u(x) + V_k(a_0, (\omega^{k-1}, 0))]$$

s.a $a_1 \leq a$ e $x + a_0 \leq a$.

D&D

Formulação Recursiva

Tomando:

$$V_N(a,\omega) = |\omega| u\left(\frac{Ra}{|\omega|}\right)$$

basta agora resolver recursivamente,

$$\begin{aligned} V_{k-1}(a,\omega^{k-1}) \equiv \max_{x,a_0,a_1} & P(\omega_i = 1|\omega^{k-1} V_k(a_1,(\omega^{k-1},1)) \\ & + P(\omega_1 = 0|\omega^{k-1})[u(x) + V_k(a_0,(\omega^{k-1},0))] \end{aligned}$$

s.a $a_1 \leq a$ e $x + a_0 \leq a$.

Diamond-Dibvyg Model

Lagrangian

(A partir daqui os slides ajudam a implementar o algoritmo no matlab e obtem a solução do problema recursivo)

- the Lagrangian is a linear in $u(x_i)$ and $u(y_i)$
- a patient agent in position i believes

$$\Pr(\omega|\varepsilon_i = 1) = \frac{P(\omega)\omega_i}{\sum_w P(w)w_i} = \frac{P(\omega)\omega_i}{1-p}$$

The rhs of (IC) can be rewritten as $1/N$ times

$$\sum_i \sum_\omega \frac{P(\omega)\omega_i}{1-p}\left[u\left(y_i\left(\omega_{-i},1\right)\right) - u\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right)\right]$$

$$= E\sum_i \left[\frac{\omega_i}{1-p}u\left(y_i\left(\omega_{-i},1\right)\right) - \frac{1-\omega_i}{p}u\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right)\right]$$

Diamond-Dibvyg Model

Lagrangian

- let λ be the multiplier on IC and defines

$$\alpha = \left(A - \frac{\lambda}{p}\right)^{1/\delta} \quad \text{and} \quad \beta = \left(1 + \frac{\lambda}{1-p}\right)^{1/\delta}$$

Lagrangian becomes

$$E \sum_i \left[(1-\omega_i)\alpha^\delta u(x_i) + \omega_i \beta^\delta u(y_i)\right]$$

$$= E \sum_i \left[(1-\omega_i) u(x_i) + \omega_i \gamma^\delta u(y_i)\right]$$

where $\gamma = \beta/\alpha$
(reescrevemos a restrição desse modo para utilizar o algoritmo da função penalidade)

Diamond-Dibvyg Model

The Recursive Structure

Date-2 efficiency: planner's sub-problem after history ω

$$\max_{y} \left\{ \gamma^{\delta} \sum_{i} u(y_i); \sum_{i} \omega_i y_i \leq Ra \right\}$$

where a denotes reserves kept after date 1

- Equal treatment: solution is $y_i = \gamma/\mu^{1/\delta}$
  - μ: multiplier on the resource constraint
  - $\mu^{1/\delta} = |\omega|\gamma/Ra$ and thus

$$y_i = \frac{1}{|\omega|} Ra$$

The expected utility implied by reserves a is thus

$$(f_N^{|\omega|})^{\delta} u(a)$$

where

$$f_N^{|\omega|} = \gamma|\omega|R^{1/\delta - 1}$$

Diamond-Dibvyg Model

Date-1 policy-function iterations

When $i = N$ (after position $N-1$)

- the bank has reserves a
- has received j patient announcements
- plans payment $c \leq a$ for position N to maximize

$$p\Big(u(c) + (f_N^j)^\delta u(a-c)\Big) + (1-p)\Big((f_N^{j+1})^\delta u(a)\Big)$$

  - solution is

$$c = \frac{1}{1+f_N^j} a$$

  - the maximum is

$$u(a)\Big(p\left[1+f_N^j\right]^\delta + (1-p)\left[f_N^{j+1}\right]^\delta\Big)$$
$$= u(a)\Big(f_{N-1}^j\Big)^\delta$$

Diamond-Dibvyg Model
Date-1 policy-function iterations

Results for $i < N - 1$ are similar:

$$p\Big(u(c) + (f^j_{i+1})^\delta u(a-c)\Big) + (1-p)\Big((f^{j+1}_{i+1})^\delta u(a)\Big)$$

$$x_i = \frac{1}{1+f^j_i}a \qquad \text{and} \qquad u(a)\Big(f^j_{i-1}\Big)^\delta$$

where

$$f^j_i = \left(p\left[1+f^j_{i+1}\right]^\delta + (1-p)\left[f^{j+1}_{i+1}\right]^\delta\right)^{1/\delta}$$

where f^j_i is the optimal savings in position i when j patient annoucements were made.

Diamond-Dibvyg Model

IC iterations

Utility gain relative to deviation

$$E \sum_i \left[\omega_i \frac{p}{1-p} u\left(y_i\left(\omega_{-i}, 1\right)\right) - (1-\omega_i) u\left(x_i\left(\omega^{i-1}, 0\right)\right)\right]$$

times $1/Np$

- patient utility after ω is $u(a) g_N^{|\omega|}$ where

$$g_N^{|\omega|} = \frac{p}{1-p} |\omega|^{\delta} R^{1-\delta}$$

- for position N, after j patient announcements

$$p\Big(g_N^j u(a - x_N) - u(x_N)\Big) + (1-p)\Big(g_N^{j+1} u(a)\Big)$$

- using optimal x_N gives partial net-gain

$$u(a) g_{N-1}^j$$

Diamond-Dibvyg Model
IC iterations

where g^j_{N-1} is

$$p\left[g^j_N\left(f^j_N\right)^{1-\delta}-1\right]\left(1+f^j_N\right)^{\delta-1}+(1-p)\left[g^{j+1}_N\right]$$

Similarly for $i<N$, g^j_i equals

$$p\left[g^j_{i+1}\left(f^j_{i+1}\right)^{1-\delta}-1\right]\left(1+f^j_{i+1}\right)^{\delta-1}+(1-p)\left[g^{j+1}_{i+1}\right]$$

Proposição

Optimal welfare with respect to λ is given by

$$\frac{1}{N}u(Y)\left(f_0^0\right)^\delta$$

and utility in telling the truth relative to deviation is given by

$$\frac{1}{Np}u(Y)g_0^0$$

where

$$f_i^j = \left(p\left[1+f_{i+1}^j\right]^\delta + (1-p)\left[f_{i+1}^{j+1}\right]^\delta\right)^{1/\delta}$$

and g_i^j equals

$$p\left[g_{i+1}^j\left(f_{i+1}^j\right)^{1-\delta} - 1\right]\left(1+f_{i+1}^j\right)^{\delta-1} + (1-p)\left[g_{i+1}^{j+1}\right]$$

with initial conditions

$$f_N^{|\omega|} = \gamma|\omega|R^{1/\delta-1}$$

and

$$g_N^{|\omega|} = \frac{p}{1-p}|\omega|^\delta R^{1-\delta}$$

Diamond-Dibvyg Model

Algorithm

(i) make $t = 0$ and guess $\lambda_t = \bar{\lambda} > 0$

(ii) calculate f_i^j for all possible i and j

(iii) calculate g_0^0

- update $\lambda_{t+1} = \exp(g_0^0)\lambda_t$

(iv) calculate $\eta = |\lambda_{t+1} - \lambda_t|$

- if $\eta = 0$, then stop
- otherwise, go back to (ii)