Monitoria A2

Economia Monetária e Financeia

EPGE - FGV

8 de outubro de 2019

Modelo Clássico de Crescimento

Problema do Planejador

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\}$$

restrito ao conjunto definido por

$$\begin{aligned} c_t \geq 0, k_{t+1} \geq 0 \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ c_t + k_{t+1} \leq f(k_t) + (1-\delta)k_t \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ k_0 \text{ dado} \quad & \end{aligned}$$

- Suponha que $\delta = 1$

Modelo Clássico de Crescimento

Problema do Planejador

Reescrevendo o problema

$$\max_{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \right\}$$

restrito ao conjunto definido por

$$k_{t+1} \in \Gamma(k_t) = [0, f(k_t)] \quad , \quad \forall t \geq 0$$
$$k_0 \text{ dado}$$

Modelo Clássico de Crescimento
Formulação Recursiva

Reescrevendo o problema

$$v(k) = \max_{k' \in \Gamma(k)} \left\{ u(f(k) - k') + \beta v(k') \right\}$$

em que $\Gamma(k) = [0, f(k)]$.

$k' = g(k)$ função política.

Modelo Clássico de Crescimento

Algoritmo

1. Carregamos todos os parâmetros e funções do *environment* .
2. Definimos um grid para a variável de estado: k, capital.
3. Criamos chutes iniciais para V e Gk e Gc, respectivamente função valor e função políticas. Também definimos TV.
4. Definimos limites de tolerância para nosso código: ε pequeno e *itmax* grande. Declaramos também um erro grande inicial $d = 1$, e iteração $it = 0$.
5. Enquanto $d < \varepsilon$ e $it \leq itmax$.
6. Para cada valor de estado k
   - para cada k' do grid, computamos c e $u(c) + \beta V(k')$.
   - Dentre todos os k', calculamos TV (máximo entre todos). E guardamos a função politica em G.
   - Calculamos $d = |TV - V|$, atualizamos V ($V = TV$).
   - Se $d < \varepsilon$ ou as iterações chegaram a *itmax* paramos o código, caso contrário voltamos ao passo 5.
7. Uma vez que convirja, achamos $V^*(k)$ tq $TV^* = V^*$. Basta recuperar as respectivas funções políticas de acordo com a posição guardada no loop das iterações.

Modelo Clássico de Crescimento Estocástico

Problema do Planejador

Consideramos agora $f(k_t, z_t) = z_t k_t^\alpha$, em que z_t é um processo estocástico que segue uma cadeia de Markov tal que $P(z_t = \bar{z} | z_{t-1} = \bar{z}) = \xi$ e $P(z_t = \underline{z} | z_{t-1} = \underline{z}) = \zeta$.

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\}$$

restrito ao conjunto definido por

$$\begin{aligned} c_t \geq 0, k_{t+1} \geq 0 \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ c_t + k_{t+1} \leq f(k_t, z_t) + (1-\delta) k_t \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ k_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

- Suponha que $\delta = 1$

Modelo Cláassico de Crescimento Estocástico

Problema do Planejador

Reescrevendo o problema

$$\max_{k_{t+1}{}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t, z_t) - k_{t+1})$$

restrito ao conjunto definido por

$$k_{t+1} \in \Gamma(k_t, z_t) = [0, f(k_t, z_t)] \forall t \geq 0 \quad k_0 > 0 \text{dado}$$

Modelo Clássico de Crescimento Estocástico

Formulação Recursiva

Reescrevendo o problema

$$v(k,z) = \max_{k' \in \Gamma(k,z)} \left\{ u(f(k) - k') + \beta \sum_{z'} \pi_{zz'} v(k', z') \right\}$$

em que $\Gamma(k,z) = [0, f(k,z)]$.
$k' = g(k)$ função política.

K&W

Enviroment

Considere uma economia descrita pelo seguinte ambiente:

- O tempo é infinito e discreto. $t = 1, 2, \ldots$
- Existem infinitas pessoas na economia, com medida normalizada para 1. Estas pessoas vivem eternamente e descontam o futuro de acordo com o fator $\beta \in (0, 1)$.
- As pessoas são divididas igualmente entre $N > 2$ grupos. As pessoas do grupo n consomem o bem que as pessoas do grupo $n + 1$.
- As pessoas são anônimas, ou seja, não é possível recordar as ações passadas de cada uma das pessoas.
- A utilidade de uma pessoa é dada por $u(x) - y$, em que x/y é a quantidade de produto que a pessoa consome/produz. Além disso, $u'' < 0 < u'$, $u(0) = 0$ e u satisfaz as condições de Inada.

K&W
Enviroment

- O produto é perecível, ou seja, não pode ser levado de um período para o outro.
- Não existe um mercado nessa economia. As pessoas devem procurar outra pessoa para fazer trocas.
- A cada período uma pessoa encontra apenas um outra pessoa e isso ocorre de forma aleatória.
- Existem objetos indivisíveis e perfeitamente duráveis que chamaremos de moeda. Ninguém possui utilidade de consumir moeda.
- Cada pessoa consegue carregar no máximo uma unidade de moeda e a quantidade de moeda é observável quando ocorre o encontro entre duas pessoas.

Processo de Trocas

Não há dupla coincidência de interesses em nenhum dos encontros, isto é, não existe encontro em que uma pessoa produz o bem que a outra consome e vice-versa.

Então, para convencer outra pessoa a produzir é preciso entregar algo de valor em troca. O único mecanismo que dispomos é trocar moeda por produto. Por que moeda seria aceita se ninguém possui utilidade sobre ela?

Processo de Trocas
Definições

Vamos olhar apenas equilíbrios estacionários e simétricos, ou seja, as alocação se repetem no tempo e não dependem do grupo das pessoas. Definição formal:

Definition

Uma alocação (m, y) é simétrica se a quantidade média de moeda m de cada tipo é igual, e $y \in \mathbb{R}_+$ (quantidade transacionada de produto) não depende dos tipos. Ou seja, não há discriminação de tipos.

Definition

Uma alocação (m, y) é estacionária se, fixado $m \in [0, 1]$, y não varia ao longo do tempo, ou seja, a alocação não é em função do tempo.

Função Payoff

Seja m a fração das pessoas da economia que possui moeda. Vamos descrever o payoff das pessoas da economia. Seja V_0 a função valor dos indivíduos que não possuem moeda e V_1 função valor dos indivíduos que possuem moeda:

$$V_0 = \frac{1}{N} m[-y + \beta V_1] + \left(1 - \frac{1}{N} m\right) \beta V_0$$

onde $\frac{1}{N} m$ é a probabilidade de encontrar alguém do grupo que ele conseguiria vender ($\frac{1}{N}$) e esta pessoa tenha moeda (m).

$$V_1 = \frac{1}{N}(1 - m)[u(y) + \beta V_0] + \left(1 - \frac{1}{N}(1 - m)\right) \beta V_1$$

onde $\frac{1}{N}(1 - m)$ é a probabilidade de encontrar alguém do grupo que ele conseguiria comprar o produto ($\frac{1}{N}$) e esta pessoa não tenha moeda (m), logo, vai querer vender o produto e adquirir moeda.

Equações de Bellman

Com algum algebrismo escrevemos as equações de Bellman associadas a esse modelo:

$$V_0 = \beta V_0 + \frac{1}{N} m[-y + \beta(V_1 - V_0)]. \tag{1}$$

$$V_1 = \beta V_1 + \frac{1}{N}(1 - m)[u(y) - \beta(V_1 - V_0)], \tag{2}$$

Incentivos e Bem-estar

Restrições de Participação

Tanto consumidor quanto produtor precisam concordar com a troca que será feita. Dessa forma, as trocas ocorrerão sempre que:

Produtor:

$$-y + \beta V_1 \geq \beta V_0 \Leftrightarrow y \leq \beta(V_1 - V_0). \tag{3}$$

Consumidor:

$$u(y) + \beta V_0 \geq \beta V_1 \Leftrightarrow u(y) \geq \beta(V_1 - V_0). \tag{4}$$

Definition

Uma alocação é compatível a incentivos se satisfaz (3) e (4), restrições de compatibilidade de incentivos do produtor e do consumidor, respectivamente.

Incentivos e Bem-Estar
Critério de Bem-Estar

Vamos utilizar o critério de bem-estar dado pela média ponderada dos grupos. Dessa forma, o bem-estar da economia, W, é dado por

$$W = mV_1 + (1 - m)V_0.$$

É possível mostrar que

$$W = \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{N}m(1-m)[u(y) - y]. \tag{5}$$

Problema do Planejador

Agora que já possuímos informações sobre os objetos da economia e entendemos que os incentivos das pessoas devem ser respeitadas, podemos descrever o problema do planejador social

$$\max_{y,m} W \qquad s.a.\ (3), (4). \tag{6}$$

Definition

Uma alocação ótima resolve o problema do planejador sujeito as restrições (1)-(4), $m \in [0,1]$ e $y \in \mathbb{R}_+$.

Problema do Planejador

Irrelevância da Restrição do Consumidor

É possível mostrar que (3) ⇒ (4).

Por (3):

$$y \leq \beta(V_1 - V_0) \Rightarrow^{y \in \mathbb{R}_+} \quad 0 \leq y \leq \beta(V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow \beta(V_1 - V_0) \geq 0 \Rightarrow V_1 \geq V_0$$

Por (6) e pelo resultado acima:

$$(1-\beta)V_0 = \frac{m}{N}(-y + \beta(V_1 - V_0)) \geq 0 \Rightarrow V_0 \geq 0$$

Logo, $V_1 \geq V_0 \geq 0$

Por (7):

$$(1-\beta)V_1 = \frac{1-m}{N}[u(y) - \beta(V_1 - V_0)] \geq 0 \Rightarrow u(y) \geq \beta(V_1 - V_0)$$

e obtivemos (4).

Utilizamos apenas a restrição do produtor no problema do planejador

Problema do Planejador

Restrição do Produtor em função das variáveis endógenas

Utilizando as equações de V_0 e V_1 podemos reescrever (3): (fazendo (2)-(1))

$$V_1 - V_0 = \beta(V_1 - V_0) + \frac{1}{N}[(1-m)u(y) - my] - \frac{1}{N}\beta(V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow (V_1 - V_0)\left[1 - \beta\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right] = \frac{1}{N}[(1-m)u(y) - my]$$

$$\beta(V_1 - V_0)[N - \beta N + \beta] = \beta[(1-m)u(y) - my]$$

Como $y \leq \beta(V_1 - V_0)$:

$$y[N - \beta N + \beta] \leq \beta(V_1 - V_0)[N - \beta N + \beta] = \beta[(1-m)u(y) - my]$$

$$\Rightarrow y[N - \beta N + \beta] \leq \beta[(1-m)u(y) - my]$$

Problema do Planejador

Restrição

Colocando $u(y)$ em evidência:

$$u(y) \geq \left[\frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)} + 1\right] y. \tag{7}$$

Esta restrição define, dados N, m e β, um produto $\bar{y}$, tal que se $y \in [0, \bar{y}]$, então y é compatível em incentivos.

Definindo

$$\alpha(m) = \frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)} + 1$$

N e β são exógenos, e fixando m obtemos y que satisfaz a restrição. Tal formulação nos ajuda quando comparamos ao ótimo do modelo irrestrito.

Problema do Planejador

Por fim, reescrevemos o problema do planejador.

Por (6):

$$\frac{V_0}{m} = \frac{1}{N(1-\beta)}[-y + \beta(V_1 - V_0)]$$

Por (7):

$$\frac{V_1}{1-m} = \frac{1}{N(1-\beta)}[u(y) - \beta(V_1 - V_0)]$$

Logo,

$$mV_1 + (1-m)V_0 = \frac{m(1-m)}{N(1-\beta)}[u(y) - \beta(V_1 - V_0) - y + \beta(V_1 - V_0)]$$

Problema do Planejador

E o problema do planejador:

$$\max_{y,m} \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{N}m(1-m)[u(y)-y] \tag{8}$$

$$s.a. \quad u(y) \geq \left[\frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)}+1\right]y.$$

Para entender um pouco mais do modelo, é preciso estudar a solução do problema relaxado (sem a restrição do produtor), como essa solução pode não ser factível e como é solução do problema quando a restrição é ativa.

Problema do Planejador
Soluções

A solução do problema relaxado é dada pelo par $(y^*, m^*) = (u'^{-1}(1), 1/2)$.

O solução do modelo quando a restrição do produtor é ativa é dada por (y^s, m^s), em que $y^s < y^*$ e $m^s < m^*$.

Definindo $\bar{y}$ tal que $u(\bar{y}) = \alpha(1/2)\bar{y}$.
É fácil verificar que y^* é alcançável de modo que a restrição estará sendo satisfeita com desigualdade estrita. (Gráfico)