FGV EPGE
ESCOLA BRASILEIRA DE ECONOMIA E FINANÇAS

CURSO TEORIA DOS JOGOS

PERÍODO: 20 DE OUTUBRO A 30 DE NOVEMBRO DE 2015.

HORÁRIO: TERÇA E QUINTA, DAS 14 ÀS 15h40.

NÚMERO DE HORAS AULA: 24

PRÉ-REQUISITOS: MATURIDADE MATEMÁTICA EQUIVALENTE AO ÚTIMO PERÍODO DA GRADUAÇÃO EM ECONOMIA.

BIBLIOGRAFIA: 1. TWO-SIDED MATCHING. A STUDY IN GAME-THEORETIC MODELING AND ANALYSIS (1990, 1992), ROTH E SOTOMAYOR, *ECONOMETRIC SOCIETY MONOGRAPHS SERIES, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.*

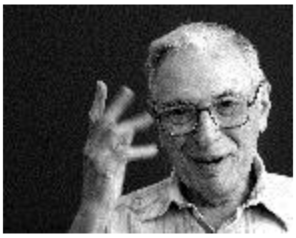
2. A COURSE IN GAME THEORY (1994), OSBORNE E RUBINSTEIN, *MIT PRESS.*

INTRODUÇÃO

Para os economistas, a teoria dos jogos é vista como uma ferramenta de análise econômica que os ajuda a entender melhor a situação econômica e predizer o que acontecerá em contextos econômicos. A teoria dos jogos oferece modelos matemáticos formais de jogos que são examinados dedutivamente, o que nos oferece as vantagens de uma linguagem clara e precisa para comunicar ideias e noções, e nos ajuda a fundamentar intuições e a selecionar as hipóteses que são realmente relevantes para as nossas conclusões.

Este mini-curso abordará os seguintes tópicos: INTRODUÇÃO À TEORIA DA ESCOLHA SOCIAL, INTRODUÇÃO AOS MERCADOS DE MATCHING e INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS COOPERATIVOS. O estudo de cada tópico será direcionado a responder as questões que emergem da situação econômica apresentada.

1. INTRODUÇÃO À TEORIA DA ESCOLHA SOCIAL



KENNETH ARROW

EXEMPLO (TEOREMA DA IMPOSSIBILIDADE DE ARROW) Considere uma firma diante do problema de escolher entre vários projetos de investimentos aquele que lhe trará o maior lucro. Embora a firma possa ser tratada como um único agente, se ela está fazendo investimentos, então os seus donos (os acionistas), quererão maximizar lucros. Não existe divergência de interesses nesse sentido. Mas os acionistas podem ter diferentes expectativas com respeito ao que cada investimento poderá oferecer no futuro. Nesse caso o problema é então:

Como definir uma regra de escolha que aponte o projeto mais preferido da firma?

Arrow observou que as preferências da firma não podem ser tratadas como preferências individuais. Elas devem satisfazer certas hipóteses para que as escolhas da firma, como um único agente, possam ser consideradas *racionais.* Então provou que sob essas hipóteses, e se o número de projetos for maior do que dois, é sempre impossível encontrar uma tal regra. Esse resultado, conhecido como o **Teorema da Impossibilidade,** foi a tese de doutorado de Arrow e está descrito em seu livro *Social Choice and Individual Values*, publicado em 1951. Em 1972, Arrow recebeu o prêmio Nobel de Economia juntamente com o economista inglês John Hicks, por "*contribuições pioneiras à teoria do equilíbrio geral e teoria do bem estar*".

2. INTRODUÇÃO À TEORIA DOS MERCADOS DE MATCHING

"Any argument which is carried out with sufficient precision is mathematical."
(David Gale)

David Gale Lloyd Shapley

(Gale's Feast – State Univ. of New York – Stony Brook- 2007)

EXEMPLO (UM MERCADO DE MATCHING). Todos os anos, numa data determinada pela Associação Nacional de Instituições de Pós-graduação - ANPEC, um número de graduados em Economia realiza um exame escrito sobre cinco disciplinas: Matemática, Estatística, Microeconomia, Macroeconomia e Economia Brasileira. Esta etapa constitui pré-requisito obrigatório para a admissão numa Escola de Pós-graduação em Economia no Brasil.

As Escolas atribuem pesos a cada uma das cinco disciplinas, que podem diferir de uma Universidade para outra. Por exemplo, a Universidade de Campinas e a Universidade Federal do Rio de Janeiro costumam atribuir à Economia Brasileira um peso maior que o da Matemática; a Escola de Pós-graduação em Economia da Fundação

Getúlio Vargas faz justamente o oposto.

A função deste mercado é realizar uma distribuição (alocação) dos estudantes pelos centros de pós graduação em Economia. O mecanismo de alocação que tem sido utilizado pela ANPEC é descentralizado ou semi-descentralizado. Os problemas que têm sido encontrados e têm motivado mudanças frequentes no procedimento de alocação são da seguinte ordem:

1. As escolas menores, menos procuradas, nem sempre conseguem preencher as suas vagas.
2. Estudantes com nível médio de rendimento nos exames nem sempre são escolhidos por alguma Escola.
3. Existência de pares, estudante-escola, em que o estudante prefere a escola àquela para a qual está alocado e a escola prefere o estudante a algum dos estudantes alocados a ela.

A questão que se coloca aqui é se existe um mecanismo de alocação que seja uma solução para os problemas apresentados acima.

A resposta é afirmativa e foi dada por Gale e Shapley (1962). Esses autores construíram um modelo matemático que chamaram de "College admission problem" que pode ser usado para modelar o mercado da ANPEC. Existem dois conjuntos disjuntos e finitos de agentes que podem ser pensados como Universidades e estudantes. Um número inteiro positivo, que chamaremos de cota, é associado a cada agente. Podemos interpretar que a cota de uma Universidade é o seu número de vagas. A cota de cada estudante é um, significando que ele pode se matricular em, no máximo, uma Universidade. Cada agente de um conjunto possui uma lista de preferências (estrita) ordenada sobre os agentes do outro conjunto. Uma alocação dos estudantes para as Universidades, que respeita as cotas dos agentes é denominada um *matching.* Um matching é *individualmente racional* se todo estudante prefere a Universidade para a qual foi alocado a ficar sem escola e toda Universidade prefere qualquer estudante alocado a ela a ficar com uma vaga não preenchida. Um estudante e uma Universidade não alocados entre si *desestabiliza* um matching se o estudante prefere a Universidade àquela para a qual foi designado e a Universidade prefere o estudante a algum dos estudantes que admitiu. Um matching é *estável* se é individualmente racional e não tem nenhum par desestabilizante. O problema acima reformulado é então:

Existe sempre um matching dos estudantes para as Universidades que seja estável?

Gale e Shapley em 1962 provaram a existência de matchings estáveis através de um algoritmo conhecido popularmente como o algoritmo de Gale e Shapley ótimo para os estudantes. Dadas as preferências dos estudantes e das Universidades, juntamente com o seu número de vagas, o algoritmo produz sempre um matching estável que é o mais preferido por todos os estudantes a qualquer outro matching estável. Revertendo-se os papéis entre estudantes e universidades neste algoritmo obtém-se o algoritmo de Gale e Shapley ótimo para as Universidades. Uma demonstração curta, simples e não construtiva da existência de matchings estáveis é dada em Sotomayor (1996).

Os algoritmos de Gale e Shapley podem ser utilizados para definir mecanismos centralizados que produzem um matching estável: uma central recebe as listas de preferências revelados pelos agentes, o número de vagas de cada Universidade e emprega um dos algoritmos de Gale e Shapley para produzir um matching estável pro mercado revelado. A utilização de um mecanismo centralizado levanta a seguinte questão:

É do interesse de cada participante revelar suas verdadeiras preferências à central?

A resposta a essa pergunta, dada em Sotomayor (2010), é negativa. Porém, se o algoritmo usado é o que produz o matching estável ótimo para os estudantes, é sempre do melhor interesse dos estudantes revelar suas verdadeiras preferências. (Dubins e Freedman, 1981).

Ao longo dos anos o problema do matching estável tem sido generalizado para diversos mercados de matching de dois lados, os quais têm sido amplamente modelados e analisados sob o enfoque da Teoria dos Jogos. Através destes modelos, uma variedade de mercados têm sido melhor compreendidos, o que tem consideravelmente ajudado as instituições que têm sido criadas para organizá-los. Em 2012 a Teoria dos Matchings Estáveis recebeu o reconhecimento de sua importância para as ciências Econômicas, através dos prêmios Nobel de Economia concedidos a um de seus fundadores, Lloyde Shapley, e a Alvin Roth, que liderou as suas aplicações na área emergente de Desenho de Mercados. David Gale, como parceiro de Shapley, teria certamente sido premiado se estivesse vivo. Faleceu em 2008.

3. INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS COOPERATIVOS

A um tomador de decisão chamamos de *jogador*, que é a entidade básica em todo modelo teórico de jogo. Num jogo *cooperativo* os jogadores podem comunicar-se uns com os outros livremente e sua principal atividade é formar *coalizões*, isto é, formar grupos de jogadores. Se uma coalizão é formada, os jogadores envolvidos deverão entrar em um acordo sobre o papel de cada um na coalizão, o pagamento que cada um irá receber, o tempo que deverão contribuir à coalizão, etc. É assumido que os jogadores tomam suas decisões com base em um certo *critério de racionalidade*, levando em conta as consequências dos possíveis acordos que eles poderiam fazer em cada coalizão que eles poderiam formar.

É assumido o *comportamento ótimo dos jogadores*, no sentido de que, quando confrontando um resultado factível, qualquer coalizão aproveitará a oportunidade de beneficiar todos os seus membros, sempre que tal oportunidade exista. Desta forma, os acordos somente serão firmados pelos membros de uma coalizão se não existir nenhum outro acordo, com qualquer coalizão, que respeite as regras do jogo e que seja mais lucrativo para todos eles que o acordo corrente. Existem regras que determinam o que cada coalizão pode ou não pode fazer. O conjunto de coalizões juntamente com os acordos obtidos pelos membros de cada coalizão, que não violam as regras do jogo, é um *resultado factível* do jogo. Naturalmente, cada jogador tem *preferências* sobre os resultados factíveis.

Abordaremos dois tipos de jogos cooperativos: *com utilidade transferível* e *com utilidade não-transferível.*

EXEMPLO (JOGOS COALIZIONAIS COM UTILIDADE TRANSFERÍVEL). Existem quatro firmas, F_1, F_2, F_3 e F_4. Cada firma deseja contratar, com exclusividade, dois pesquisadores de um certo Instituto, que sejam qualificados para realizar um dado projeto. Os valores que as firmas pagam por seus projetos são, respectivamente, 16, 15, 14 e 20 mil dólares.

Existem 4 candidatos: p_1, p_2, p_3 e p_4.

p_1 e p_3 são qualificados somente para o projeto de F_1 e nenhum outro grupo de pesquisadores é qualificado para F_1;

p_1 e p_4 são qualificados somente para o projeto de F_2 e nenhum outro grupo de pesquisadores é qualificado para F_2;

p_2 e p_3 são qualificados somente para o projeto de F_3 e nenhum outro grupo de pesquisadores é qualificado para F_3;

p_2 e p_4 são qualificados somente para o projeto de F_4 e nenhum outro grupo de pesquisadores é qualificado para $F_{4.}$

Suponha que todos os pesquisadores possam se comunicar livremente uns com os outros. Suponha também que participar no projeto confere prestígio, portanto qualquer candidato prefere participar num projeto e não ganhar nada, a não participar.

Se é esperado que os candidatos se comportem otimamente, as perguntas naturais são:

a) Que parcerias podemos predizer que serão formadas?

b) Como os ganhos de uma parceria serão divididos entre os parceiros?

Este mercado pertence à categoria de jogos chamados *assignment games*, introduzidos por Shapley e Shubik em seu artigo de 1972. O estudo de tais jogos e suas generalizações é de interesse econômico pela sua aplicabilidade em mercados de trabalho e mercados de compra e venda.

EXEMPLO (JOGOS COALIZIONAIS COM UTILIDADE NÃO TRANSFERÍVEL) Existe um conjunto de indivíduos $N=\{1,\ldots,n\}$. Cada indivíduo j possui uma casa w_j, tem preferências sobre todas as casas do mercado, incluindo a sua, e deseja, se possível, trocar a sua casa por outra mais preferível, se houver.

Todos os agentes podem se comunicar livremente entre si. As regras deste mercado são que nenhum indivíduo pode obter mais de uma casa e nenhuma casa pode ser alocada para mias de um indivíduo. Assim, o processo de negociação produz uma alocação factível, isto é, uma permutação das casas entre os indivíduos. A pergunta natural é:

Existe alguma alocação factível que possa resultar do comportamento ótimo dos agentes, isto é, tal que não exista nenhum grupo de indivíduos que possam, permutando entre si somente as suas próprias casas, obter para cada um deles, uma casa preferida àquela que lhe foi alocada?

O conjunto das alocações com esta propriedade é identificado com o *núcleo* dessa Economia.

Considere agora o seguinte procedimento de alocação. Cada casa recebe um preço. Dados esses preços, cada agente adota o comportamento de "tomador de preços" . Isto é, ele negocia aos preços dados, almejando obter a casa mais preferida dentre todas as que pode pagar, usando o valor monetário alocado à sua casa. A pergunta então é:

a) *Existe um vetor de preços, um preço para cada casa, tal que o comportamento de tomador de preços leve a uma permutação das casas em que todo agente esteja recebendo uma casa preferida dentre todas as que pode pagar?*
b) *Dado um vetor de preços como o descrito em a), é o comportamento de tomador de preços ótimo para cada agente?*

Um par formado por um vetor de preços e uma permutação como descrito em a) é chamado *equilíbrio competitivo*.

Este mercado é uma economia de troca pura e é um exemplo do Mercado de Casas devido à Shapley e Scarf (1974). As respostas às perguntas propostas foram dadas afirmativamente por esses autores. Neste mesmo artigo, um algoritmo chamado *top trading cycles* foi proposto por David Gale, oferecendo uma demonstração simples e construtiva da existência de pontos no núcleo e de equilíbrios competitivos. Esse algoritmo tem sido usado no mercado de transplantes de rins nos Estados Unidos. Uma demonstração não construtiva, mais simples que a de Shapley e Scarf, é oferecida em Sotomayor (2005).