PÓS-GRADUAÇÃO – Ementa de disciplina
Mestrado e Doutorado em Economia

DISCIPLINA: Nivelamento em Matemática II SIGLA: NM	CÓDIGO: MDPMAT027
PROFESSOR:	CARGA HORÁRIA: 10h CRÉDITOS: 0
DATA DE INÍCIO: 07/01/2019 DATA DE FIM: 11/01/2019	OBRIGATÓRIA: ☐SIM ☒ NÃO CURSO: ☐M ☐D ☒MD
PRÉ-REQUISITO: Boa matemática de Nível Médio	
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática	

EMENTA

----- Introdução -----
* Cursos na EPGE são proof-based.
* Pode-se jogar xadrez enquanto se aprende as regras, mas dificilmente ganhar.
* Criatividade é algo posterior. Aqui são ferramentas.

----- Provas -----
* O objetivo é a comunicação de certas verdades.
* A linguagem matemática é precisa. Uma boa demonstração não possui ambiguidade.
* Foco em técnicas de demonstração, não em assuntos de matemática.
* Dica: escolher técnica de demonstração antes de iniciar sua escrita.
* "Uma prova é uma demonstração convincente, expressa na linguagem matemática, que uma afirmação é verdadeira".
* Afirmações são V ou F e ponto final. 4 exemplos (pg. 2).
* Importante: uma prova deve conter detalhes o suficiente para ser convincente para o leitor.

----- Implicações (Afirmações Condicionais) -----
* Problema fundamental: se A, então B. Hipótese e conclusão.
* Alternativas de notação: "A implica B", "A => B", "A somente se B", "B segue de A", "A é suficiente para B", "B é consequência necessária de A".
* Exemplo "estudar muito => boa nota". Fazer tabela verdade.
* Exemplos numéricos "V => F" e "F => F".
* Exemplo "(x > 2) => (x^2 > 4)" e o único trabalho com implicações.
* Exercícios Sugeridos (Solow 1.5, 1.16, 1.17).

----- Método Backward-Forward -----
* Proposição 1 (pg. 9).

----- Processo Backward -----
* Começa com conclusão B.
* Faz pergunta-chave abstrata, responde abstratamente, e insere no problema.
* Problema das perguntas-chave: não fazem referências a informações na hipótese A.

Praia de Botafogo, 190 – 11º andar – Rio de Janeiro – RJ – CEP: 22250-900 – Brasil
Tel.: (55 21) 3799-5479/Fax: (55 21) 2552-4898

* Escreve B1. Continua e escreve B2. O foco agora é "A => B2".

----- Processo Forward -----
* Começa com hipótese A, suposta verdadeira.
* Derivam-se afirmações verdadeiras. Utilizam-se definições, manipulações algébricas, combinações de afirmações verdadeiras, teoremas conhecidos previamente.
* Exemplo completo em tabela (pg. 13).

----- Leitura de Demonstrações -----
* Usualmente são condensadas.
* Exemplos 100% forward (mais usual) e 100% backward (pg. 14).
* Quadrado e quod erat demonstrandum.
* Exemplo muito condensado (pg. 15).
* Dificuldades: ordem diversa, técnicas omitidas, múltiplos passos em única afirmação.
* Dica: leitura ativa, com pequenas verificações.
* Exercícios Sugeridos (Solow 2.17, 2.22, 2.36 adaptado = 1a. demonstração).

----- Sobre Definições -----
* Em matemática, uma definição é um acordo de todas as partes envolvidas sobre o significado de um termo particular.
* Exemplos anteriores: triângulo isósceles e a tabela verdade.
* Exemplos importantes: definições 8~10 (pg. 26).
* Notações para equivalências: "A é V se e somente se B é V", "A se e só se B", "A sse B", "A <=> B". Demonstração de "ida" e "volta".
* Em múltiplas definições, pode-se desejar mostrar a equivalência entre elas. Garantida a equivalência, qualquer uma pode ser utilizada indiscriminadamente.
* Exemplo: definições para inteiro par (pg. 27) e proposição 2 (pg. 28).
* Obs: problemas com notação (arbitrariedade limitada na escolha de letras e símbolos).

* Utilização de conhecimento prévio backward (proposição 3 na pg. 30 versus proposição 1 na pg. 9, e exemplo de prova na pg. 31). Fazer triângulo com conhecimento prévio "C => B", proposição desejada "A => B", e trabalho necessário "A => C".
* Utilização de conhecimento prévio forward: triângulo com conhecimento prévio "A => C", proposição desejada "A => B", e trabalho necessário "B => C".

----- Terminologia Matemática -----
* 5 termos conhecidos: proposições, teoremas, lemas, corolários, axiomas.
* Proposições são afirmações verdadeiras de interesse que se está tentando provar.
* Teoremas são proposições importantes.
* Lemas são proposições preliminares utilizadas na demonstração de teoremas.
* Corolários são proposições que decorrem facilmente de um teorema já provado.
* Axiomas são afirmações aceitas sem necessidade de demonstração.
* Definição e notação para negação de afirmações: "¬A", "~A".
* Dado "A => B", temos as definições de contrapositiva (~B => ~A), recíproca (B => A) e inversa (~A => ~B).
* Com estas definições (conjunção, união, implicação, equivalência, negação) podemos montar diversas tabelas verdade. Exemplo: equivalência entre implicação e contrapositiva (nova técnica de demonstração).

* A negação da implicação reflete a demonstração por contraexemplo.
* Frisar diferença entre demonstração por contraexemplo e por contrapositiva.
* Comentários breves sobre múltiplas equivalências, contradições e tautologias.
* Exercícios Sugeridos (Solow 3.6, 3.9, 3.22).

*_*_* DIA 2 *_*_*
----- Quantificadores I: O Método da Construção -----
* Afirmações são recheadas de quantificadores, que são dois: o quantificador existencial ("existe", "existem", "há", "para algum", ou E, em símbolos) e o quantificador universal ("para todo", "para qualquer", "para cada", ou V, em símbolos).
* Trataremos do quantificador existencial. Exemplos [definição 7 pg. 41, definição 5 pg. 42, definição 11 pg. 42].
* A unicidade é um caso particular de existência.

* O 'formato padrão': Existe um 'objeto' com 'certa propriedade' tal que 'alguma coisa acontece'.
* Reforçar necessidade de especificar bem o objeto (exemplo A, pg. 42).
* O método da construção aplica-se quando a conclusão está no formato padrão acima. Deve-se identificar o objeto, construí-lo, e o objeto construído torna-se um novo passo intermediário (nova afirmação).
* Não há receita de bolo sobre a construção do objeto. Tais demonstrações podem se assemelhar a tirar um coelho da cartola, mas a dica é observar se (i) as hipóteses no processo forward, ou (ii) o próprio 'alguma coisa acontece' permite a construção do objeto de interesse.
* Exemplos (proposição 4 pg. 44, proposição 5 pg. 45).
* Exercícios Sugeridos (Solow 4.1, 4.10, 4.14 e 4.15).

----- Quantificadores II: O Método da Escolha -----
* Trataremos do quantificador universal. Um pouco de teoria dos conjuntos será útil.
* Conjuntos podem ser expressos por propriedades que o definem. Exemplos (exemplos S e T, pg. 54, e conjunto vazio logo acima na mesma pg.).
* Definições 12 e 13 (pg. 55). Responder uma pergunta-chave é mostrar que certo objeto possui certa propriedade (ou seja, pertence a um conjunto).
* O 'formato padrão': Para todo 'objeto' com 'certa propriedade', 'alguma coisa acontece'. Exemplos (1 e 2, pg. 55, atenção ao último parágrafo).
* O método da escolha aplica-se quando a conclusão está no formato padrão acima. Ao invés de listar, um a um, todos os possíveis 'objetos' com 'certa propriedade', apenas se escolhe um 'objeto' destes (genérico) e cria-se uma "demonstração modelo" para ele. Ao fim, basta concluir que vale para todos os outros, justamente pela generalidade utilizada. (Figura 5.1, pg. 57).
* O 'objeto' genérico escolhido se torna uma afirmação forward, e o 'alguma coisa acontece' se torna uma afirmação backward para o 'objeto' escolhido.
* Cuidado: assumir somente a 'certa propriedade' no 'objeto' genérico.
* Obs: é mais didático escolher outro símbolo para o 'objeto' escolhido, mas não é obrigatório.
* Exemplo (proposição 6, pg. 58, seguir afirmações). Prova da proposição 7 (pg. 61).
* Citar demonstração por vacuidade através do exemplo (primeira afirmação B, pg. 60).
* Cuidado: verificar que o objeto é não vazio (senão a demonstração está concluída).
* Obs: é recomendável não citar nomes de técnicas, nem afirmações em listas. Mais uma vez, as técnicas se misturam e as afirmações podem ser condensadas.
* Exercícios Sugeridos (Solow 5.3, 5.9 adaptado = demonstrar a proposição, 5.22 adaptado = demonstrar a proposição).

----- Quantificadores III: Especialização -----
* Agora observamos o quantificador universal na hipótese.
* O ponto é observar um 'objeto' específico dentre todos que possuem 'certa propriedade' e para os quais 'alguma coisa acontece', e aplicar tal propriedade nele para chegar à conclusão. Ao invés de usar a propriedade válida para todos, usa apenas em um deles.
* Obs: é necessário deixar claro que o 'objeto' de especialização possui 'certa propriedade'.
* Exemplo (definição 14 e proposição 8, pg. 71).
* Exemplo (definição 15 e proposição 9, pg. 73).
* Exercícios Sugeridos (Solow 6.7 e 6.8, 6.10, 6.19).

*_*_* DIA 3 *_*_*
----- Quantificadores IV: Quantificadores Aninhados -----
* Quantificadores aninhados ou múltiplos quantificadores são a mesma coisa.
* A interpretação merece mais cuidado. Exemplos (S1, S2, S3 e S4, pg. 81).
* A omissão de um quantificador pode levar a um erro de sintaxe.
* Para demonstrações, deixar sempre nas 'forma padrão', e trabalhar os quantificadores (e suas respectivas técnicas) na ordem em que são lidas. Exemplo (afirmação B, pg. 84).
* Exemplo (definição 16 e proposição 10, pg. 84).
* Obs: a ordem dos quantificadores importa.
* Exercícios Sugeridos (Solow 7.11 e 7.12 adaptado = 7.11 seria o enunciado da propriedade arquimediana e 7.12 só demonstração, 7.17, 7.20, 7.22).
--> Cuidado: o símbolo "pertence" invertido significa "tal que".

----- Negações -----
* Saber escrever a negação de afirmações é essencial para o método da contradição e o método da contrapositiva.
* Para compreender a negação de afirmações com "não", "e" e "ou", basta lembrar da teoria básica de conjuntos. Diagramas de venn, regras em símbolos, e exemplos.
* Um pouco mais delicado é negar afirmações com quantificadores. Mas é essencialmente simples, pois ocorre uma inversão de qantificadores (vide progressão de afirmações no 'formato padrão' B, pg. 94). Ao final temos um "alguma coisa não acontece". Exemplos 1 e 2 (pg. 95).
* Dica: começar com "não é verdade que" e repetir a afirmação. Apresentar o símbolo "não existe".
* Com quantificadores aninhados, o processo se repete até que os 'nãos' desapareçam. Exemplos 3 e 4 (pg. 96).
* Obs: a 'certa propriedade' não muda com a negação.
* Eventualmente haverá suspeita que uma afirmação S não é verdadeira. Demonstrar isso é o mesmo que mostrar que 'não S' é verdadeira.
* Quando S (como acima) possui um quantificador universal, a demonstração que 'não S' é verdadeira segue o método da construção. O 'objeto' construído é chamado de contraexemplo de S. Essa é a demonstração por contraexemplo. Exemplo B (pg. 96).
* Quando S (como acima) é do tipo "A => B", lembre-se da tabela verdade: 'não S' é equivalente a "A e não B". Um objeto que satisfaz "A e não B" é um contraexemplo de S. Exemplo S (pg. 97).
* Exercícios Sugeridos (Solow 8.4, 8.6 adaptado = apenas negar as afirmações, 8.9).

----- O Método da Contradição -----
* As técnicas apresentadas até aqui podem ser insuficientes. Exemplo (proposição 12, pg. 101).

* Quando desejamos mostrar que "A => B", supomos A verdadeira e na maioria das vezes sabemos a priori que B também será. O método da contradição consiste essencialmente em averiguar "por que B não pode ser falsa (com A verdadeira)?". Do ponto de vista prático, trata-se de assumir "A e não B" e chegar a uma afirmação claramente falsa (uma contradição). Figura 9.1 (pg. 103).
* Outra interpretação para o método da contradição vem da tabela verdade de "A => B". O método consiste em eliminar o caso em que "A => B" é falsa.
* Obs: geralmente não se sabe qual a contradição a ser alcançada, sendo necessário ficar atento às conclusões intermediárias. Qualquer contradição vale!
* O método da contradição é mais atrativo quando "não B" dá boas informações para trabalhar forward. Exemplo (proposição 13, pg. 103).
* Nota sobre "sem perda de generalidade": não reduzir o conjunto, mas (provavelmente) caracterizá-lo com "um número menor de propriedades".
* Um grande ganho do método da contradição ocorre quando a conclusão B possui um quantificador existencial (demonstração de existência). Usualmente, trata-se do método da construção, que exige um 'objeto' explícito com as propriedades pré-definidas (demonstração construtivista, possivelmente com auxílio de computadores). Por outro lado, o método da contradição não mostra que o 'objeto' existe, mas mostra que é impossível que ele não exista. Aqui há um debate filosófico.
* Exemplo com várias "sub-demonstrações" por contradições (proposição 14, pg. 106).
* Exercícios Sugeridos (Solow 9.8, 9.12, 9.17, 9.23 e 9.24 = demonstrar as duas).

----- O Método da Contrapositiva -----
* O desafio do método da contradição é identificar qual será a contradição utilizada. O método da contrapositiva contorna isso naturalmente: "A => B" equivale a "~B => ~A", e assim pode-se trabalhar forward com ~B e backward com ~A. A contradição específica "A^~A" leva a conclusão B (~B é uma hipótese de contradição). Figura 10.1 (pg. 117).
* Exemplo (definição 17 e proposição 15, pg. 116).
* O método da contrapositiva pode ou não ser visto como um caso particular do método da contradição, não necessariamente utilizando o vocabulário de contradição.
* Também pode-se observar a tabela verdade de "A => B": se B é verdadeira, a implicação é verdadeira. Ou seja, basta verificar o caso em que B é falsa, e saber se A é falsa.
* O método da contrapositiva é útil quando A é menos informativa que ~B. Exemplo (proposição 16, pg. 118).
* Exercícios Sugeridos (Solow 10.1, 10.17, 10.22).

*_*_* DIA 4 *_*_*

----- Unicidade -----
* A unicidade pode ser vista como um caso particular da existência ("existe um único", "existe um, e somente um", "existe exatamente um", ou E!, em símbolos).
* Se o quantificador de existência única surge na hipótese, pode-se desmembrar tal hipótese em duas afirmações: (i) existe X com certa propriedade tal que alguma coisa acontece, e (ii) X = Y, onde Y possui certa propriedade e alguma coisa acontece.
* Exemplo (proposição 17, pg. 126).
* Se o quantificador de existência única surge na conclusão, desejamos demonstrar (i) e (ii). Então existem duas demonstrações a serem feitas (existência e unicidade).
* Obs: tal como "ida" e "volta", não existe ordem única para demonstração de "existência" e "unicidade".

* Para provar unicidade: suponha que x e y possuem certa propriedade e alguma coisa acontece, e conclua que x = y. Exemplo (proposição 18, pg. 127).
* Também é muitíssimo comum provar tal implicação pelo método da contradição: suponha que x e y são distintos, possuem certa propriedade e alguma coisa acontece, e conclua uma contradição. Exemplo (proposição 19, pg. 128).
* Exercício Sugerido (Solow 11.12).

----- Indução -----
* A indução é uma alternativa ao método da escolha, quando o quantificador universal ("para todo") refere-se a certos conjuntos infinitos de números inteiros.
* forma padrão da conclusão: para todo inteiro n>=n0, algo acontece. Onde P(n) é uma afirmação que depende de n. Exemplo (pg. 133).
* Passos para demonstrar por indução: (i) verificar que P(n0) é verdadeira, e (ii) mostrar que P(n)=>P(n+1). Figura 12.1 (pg.135).
* No passo (ii), P(n) é chamada de 'hipótese de indução'.
* Obs: é comum não entrar em detalhes quando P(n0) é facilmente verificável.
* Exemplo (proposição 20, pg. 137).
* Uma variação é mostrar P(n-1)=>P(n).
* Outra variação é a indução forte: a hipótese de indução é que P(n0), P(n0+1), ..., P(n) são todas verdadeiras. Exemplo (proposição 21, pg. 138).
* A indução forte é útil quando é mais fácil demonstrar que P(j)=>P(n+1) com j<n.
* Exercícios Sugeridos (Solow 12.1, 12.5, 12.19 e 12.9).

----- Provas por Casos e por Eliminação -----
* Quando "ou" aparece na hipótese ou na conclusão. Dois possíveis casos: "(C ou D) => B", ou "A => (C ou D)".
* É possível verificar que "(C ou D) => B" é equivalente a "(C => B) e (D => B)". Esta é a demonstração por casos. Exemplo (proposição 22, pg. 145).
* Quando os casos são muito similares de se demonstrar, um 'sem perda de generalidade' pode ser usado. Cuidado: tal preguiça não pode comprometer o convencimento da prova.
* Também pode-se verificar que "A => (C ou D)" é equivalente a "(A e ~C) => D" e a "(A e ~D) => C". Esta é a demonstração por eliminação. Isso pode encurtar/facilitar a prova. Exemplo (proposição 23, comparar provas nas pgs. 148 e 149).
* Exercício Sugerido (Solow 13.3).

----- Métodos com Mínimo/Máximo -----
* Um máximo é uma cota superior que pertence ao conjunto. Para cota inferior e mínimo, as definições são análogas.
* Para demonstrar conslusões envolvendo a definição de mínimo ou de máximo, a dica é observar certas equivalências (tabela, pg. 156).
* Observar que as desigualdades se mantém estritas/inclusivas. No caso de igualdade, valem duas desigualdades simultaneamente (prova por eliminação).
* Exemplo simples (proposição 25, pg. 157).
* Exemplo extenso (princípio arquimediano + princípio da boa ordenação + proposição 26, pg. 158).
* Exercícios Sugeridos (Solow 14.4, 14.7).

*_*_* DIA 5 *_*_*

----- Sumário de Técnicas -----
* Uma boa demonstração é aquela que convence o leitor. Quanto mais leitores convencidos, melhor.
* Prova direta: derivar consequências da hipótese (forward) e/ou simplificar a conclusão a ser atingida (backward), até que a implicação seja estabelecida.
* Contraexemplo: servem para demonstrar que uma implicação é falsa. Equivale a mostrar que a hipótese é verdadeira, enquanto a conclusão é falsa.
* Prova por construção: em demonstração de existência, explicitar algum objeto que satisfaça a condição requerida.
* Método da escolha: ao demonstrar uma propriedade válida para certo conjunto, basta demonstrar para um único elemento representativo. Tomar cuidado para não assumir hipóteses adicionais. Eventualmente ficar atento à conjuntos vazios (demonstração por vacuidade).
* Especialização: quando uma hipótese possui um quantificador universal, pode ser suficiente aplicar tal hipótese para um único objeto em particular.
* Na presença de múltiplos quantificadores, distinguir cada processo lógico envolvido (construção, escolha, ou especialização).
* Prova por contradição: assumir, além da hipótese, que a conclusão é falsa. Chegando-se a qualquer contradição, conclui-se a demonstração.
* Prova por contrapositiva: supor que a conclusão é falsa, e concluir que a hipótese é falsa.
* Prova de unicidade: usualmente requer a existência. Supõe-se x,y com certa propriedade e demonstra-se que x=y. Pode-se utilizar contradição/contrapositiva nesta implicação.
* Indução finita: consiste em dois passos, (i) verificar a veracidade de P(n0), e (ii) mostrar que P(n) implica P(n+1).
* Prova por casos: quando a hipótese tem estrutura de "ou", segmentar a demonstração em implicações caso a caso.
* Prova por eliminação: quando a conclusão tem estrutura de "ou", pode-se supor a negação uma das possíveis conclusões e obter a restante.
* Usualmente a negação de afirmações é utilizada para obter hipóteses mais informativas. Ter isto em mente nas demonstrações por contraexemplo, contradição, contrapositiva e eliminação.
* Provas com mínimo/máximo: é sempre possível reescrever sentenças com mínimo/máximo com quantificadores adequados, e recair em casos anteriores.
* Nas listas da EPGE, ser pragmático e otimizar tempo nas resoluções (respostas das turmas anteriores, Wiki da EPGE, Math Stack, Google).
* Nos exames da EPGE, evitar ao máximo deixar questões em branco.

----- Lista Final de Proposições -----
* Matemática discreta: 35 (pg. 238), 37 (pg. 243, com definição 44).
* Álgebra linear: 41 (pg. 162, com definição 48).
* Álgebra moderna: 44 (pg. 273, com proposição 43).
* Análise real: 47 (pg. 289, com definição 51), 49 (pg. 296, com definições 53 e 55).

OBJETIVOS

Prover conhecimento em vários tópicos de Matemática que são necessários a um aluno ingressante nos Programas de Doutorado e Mestrado, explorando e desenvolvendo a intuição, argumentação e escrita matemática dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

Solow, Daniel